Correction DM 5 - Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 - ECRICOME ECS 2013

1. **Étude de f.**

   (a) f est $\mathcal{C}^1$ car c'est une fonction polynomiale des coordonnées. On peut donc calculer pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:
$$\partial_1 f(x,y)=\frac{1}{5}(2x(1-x^2)+x^2\times(-2x)+2y)=\frac{2}{5}(x+y-2x^3).$$
Et :
$$\partial_2 f(x,y)=\frac{1}{5}(2y(1-y^2)+y^2\times(-2y)+2x)=\frac{2}{5}(x+y-2y^3).$$
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a :
$$\begin{aligned}(a,b)\text{ critique} &\Leftrightarrow \begin{cases}\partial_1 f(a,b)=0\\ \partial_2 f(a,b)=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a+b-2a^3=0\\ a+b-2b^3=0\end{cases}\end{aligned}$$
Supposons que (a,b) est un point critique. Montrons que $a=b$. On a alors :
$$(a+b+2a^3)-(a+b+2b^3)=0.$$
Donc :
$$2a^3-2b^3=0.$$
Puis :
$$a^3=b^3.$$
Et donc :
$$\boxed{a=b}$$
car $x\mapsto x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Abandonnons l'hypothèse (a,b) critique. On a donc :
$$\begin{aligned}(a,b)\text{ critique} &\Leftrightarrow \begin{cases}a+b-2a^3=0\\ a+b-2b^3=0\\ a=b\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}2a-2a^3=0\\ a=b\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a(1-a)(1+a)=0\\ a=b\end{cases}\\ &\Leftrightarrow (a,b)=(0,0)\text{ ou }(a,b)=(1,1)\text{ ou }(a,b)=(-1,-1).\end{aligned}$$
Donc l'ensemble des points critiques est $\boxed{\{(0,0),(1,1),(-1,-1)\}}$.
De plus :
$$\boxed{f(0,0)=0,\quad f(1,1)=\frac{2}{5}\quad\text{et}\quad f(-1,-1)=\frac{2}{5}.}$$

   (b) La fonction g est une fonction polynomiale du second degré. Elle admet donc un unique extremum en son sommet. C'est un maximum car son terme de plus haut degré est négatif. On a pour tout $t\in\mathbb{R}$:
$$\frac{2t}{5}-\frac{t^2}{10}=\frac{1}{10}t(4-t).$$
Donc les racines de g sont 0 et 4. Donc le sommet est en 2.
<u>Ainsi g atteint un maximum en 2</u> qui vaut $\boxed{g(2)=\frac{4}{5}-\frac{4}{10}=\frac{2}{5}}$.

(c) On sait que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x,y) \leq \frac{2}{5}(x^2+y^2) - \frac{1}{10}(x^2+y^2)^2.$$

Or $\frac{2}{5}(x^2+y^2) - \frac{1}{10}(x^2+y^2)^2 = g(x^2+y^2)$. De plus g est majoré par son maximum $\frac{2}{5}$. Donc :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \leq g(x^2+y^2) \leq \frac{2}{5}.$$

Donc f est majorée par $\frac{2}{5}$ qu'elle atteint en $(-1,-1)$ et $(1,1)$, c'est donc un maximum de f.
De plus si f était minorée par $m \in \mathbb{R}$, alors on aurait :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ m \leq f(x,y) \leq g(x^2+y^2).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, posons $x = y = \sqrt{\frac{t}{2}}$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$g(x^2+y^2) = g(t).$$

Or $\lim_{t \to +\infty} g(t) = -\infty$. Donc g n'est pas minorée sur R_+. Et donc f n'est pas minorée.

2. **Programmation de $(u_n)_{n \geq 0}$:**

```python
import numpy as np

def f(x,y):
    return 1/5*(x*x*(1-x*x) + y*y*(1-y*y) + 2*x*y)

def suite(u0,u1,N):
    if N == 0:
        return u0
    elif N == 1:
        return u1

    u = np.zeros(N+1)
    u[0] = u0
    u[1] = u1
    for i in range(2,N+1):
        u[i] = f(u[i-2],u[i-1])
    return u[N]
```

3. **Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:**

(a) **Lemme :** Soient $x \in [0,1]$ et $y \in [0,1]$. Montrons que $f(x,y) \in [0,1]$.
On a $0 \leq x^2 \leq 1$ puis $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$ et donc : $0 \leq x^2(1-x^2) \leq 1$. De même $0 \leq y^2(1-y^2) \leq 1$. On a aussi $0 \leq 2xy \leq 2$.
Ainsi $0 \leq \frac{1}{5}(x^2(1-x^2) + y^2(1-y^2) + 2xy) \leq \frac{4}{5}$. Et donc :

$$\boxed{f(x,y) \in \left[0, \frac{4}{5}\right] \subset [0,1]}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$H_n \ : \ « \ u_n \text{ est dans } [0,1] \ ».$$

Montrons que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence double.

- **Cas $n = 0$:** Pour $n = 0$, cela revient à dire que $u_0 \in [0,1]$, ce qui est une hypothèse de l'énoncé.
- **Cas $n = 1$:** De même, $u_1 \in [0,1]$ par hypothèse.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que H_n et H_{n+1} sont vraies, c'est-à-dire que u_n et u_{n+1} sont dans $[0,1]$. Montrons que H_{n+2} est vraie, c'est-à-dire que u_{n+2} est dans $[0,1]$.
  On a : $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$. Or $u_n, u_{n+1} \in [0,1]$ par hypothèse de récurrence et donc d'après le lemme $f(u_n, u_{n+1}) \in [0,1]$. Donc on a bien $u_{n+2} \in [0,1]$.

Ainsi on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \in [0,1]}$.
Soit désormais $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \leq \frac{2}{5}(u_n^2 + u_{n+1}^2) - \frac{1}{10}(u_n^2 + u_{n+1}^2)^2$$

d'après l'inégalité admise précédemment. Donc :

$$u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n^2 + u_{n+1}^2)$$

puisque $-\frac{1}{10}(u_n^2 + u_{n+1}^2)^2 \leq 0$. Puis comme $u_n \in [0,1]$ et $u_{n+1} \in [0,1]$, leurs carrés sont plus petits qu'eux. Donc :

$$\boxed{u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1}).}$$

(b) Procédons par récurrence double. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$H_n \ : \ « \, u_n \leq a_n \, ».$$

- **Cas $n = 0$:** On a $u_0 = a_0$ par définition de (a_n) donc H_0 est vraie.
- **Cas $n = 1$:** On a $u_1 = a_1$ par définition de (a_n) donc H_1 est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n et H_{n+1}. Montrons H_{n+2}.
  On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &\leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1}) \\ &\leq \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1}) \\ &\leq a_{n+2}. \end{aligned}$$

  Donc H_{n+2} est vraie.

Donc par principe de récurrence double, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \leq a_n}$.

(c) (a_n) est une suite récurrente double d'équation caractéristique :

$$x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{2}{5} = 0.$$

Le discriminant de cette équation de degré 2 est :

$$\Delta = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{44}{25} > 0.$$

Il y a donc deux racines que l'on notera r et s avec :

$$r = \frac{\frac{2}{5} + \sqrt{\frac{44}{25}}}{2} = \frac{1 + \sqrt{11}}{5} \quad \text{et} \quad s = \frac{\frac{2}{5} - \sqrt{\frac{44}{25}}}{2} = \frac{1 - \sqrt{11}}{5}.$$

Il existe donc deux réels λ, μ tels que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = \lambda r^n + \mu s^n.}$$

On a $3 \leq \sqrt{11} \leq 4$. Donc $r \in [0,1[$ et $s \in]-1,0]$. Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

comme somme de suites géométriques de raisons entre -1 et 1 (exclus).
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq u_n \leq a_n.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$