Correction DS4 - Réduction, Vecteurs aléatoires

Exercice 1 - EDHEC ECS 2022 (adapté)

1. Commençons par montrer que g est bien définie. Pour cela, nous devons vérifier que $F(a) \neq 0$.
On a :
$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} \underbrace{f(t)}_{\geqslant 0} \, \mathrm{d}t.$$
Or f est postive et continue donc l'intégrale s'annule si et seulement si f est identiquement nulle. Or f est strictement positive. Donc $F(a) \neq 0$ (et même $F(a) > 0$).
$\boxed{\text{Donc } g \text{ est bien définie.}}$
Vérifions maintenant que g est une densité :
   - Comme f est continue, $\boxed{g \text{ est également continue.}}$
   - D'après ce qui précède, $F(a) > 0$ et f est strictement positive. Donc $\boxed{g \text{ est strictement positive.}}$
   - On a :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} \frac{f(x)}{F(a)}\mathrm{d}x$$
   qui converge bien puisque f est une densité.
   Puis :
   $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \frac{F(a)}{F(a)} = 1.}$$

   Donc $\boxed{g \text{ est une densité.}}$

2. (a) Comme g est une densité, on peut calculer la fonction de répartition associée pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec l'intégrale suivante convergente :
$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\mathrm{d}t.$$
Si $x \leqslant a$ alors :
$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{F(a)}\mathrm{d}t = \frac{F(x)}{F(a)}.$$
Et si $x > a$ alors :
$$G(x) = \int_{-\infty}^{a} \frac{f(t)}{F(a)}\mathrm{d}t = \frac{F(a)}{F(a)} = 1.$$
Donc :
$$\boxed{G(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{F(a)} & \text{si } x \leqslant a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}.}$$

   (b) Puis que $F(a) \neq 0$, $P(X \leqslant a) \neq 0$ et donc $P_{[X\leqslant a]}(X \leqslant x)$ est bien définie. Calculons pour $x \in \mathbb{R}$:
$$P_{[X\leqslant a]}(X \leqslant x) = \frac{P([X \leqslant x] \cap [X \leqslant a])}{P(X \leqslant a)}$$
Si $x \leqslant a$ alors $[X \leqslant x] \subset [X \leqslant a]$ et donc :
$$P_{[X\leqslant a]}(X \leqslant x) = \frac{P(X \leqslant x)}{P(X \leqslant a)} = \frac{F(x)}{F(a)} = G(x).$$
Et si $x > a$ alors $[X \leqslant a] \subset [X \leqslant x]$ et donc :
$$P_{[X\leqslant a]}(X \leqslant x) = \frac{P(X \leqslant a)}{P(X \leqslant a)} = 1 = G(x).$$
Ainsi on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{G(x) = P_{[X\leqslant a]}(X \leqslant x).}$$

3. (a) M_n étant une variable aléatoire, calculons sa fonction de répartition pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G_n(x) = P(\max(Y_1, \ldots, Y_n) \leqslant x)$$

Or le maximum est inférieur à x si et seulement toutes les variables Y_1, ..., Y_n sont inférieures à x. Donc :

$$\begin{aligned} G_n(x) &= P(\cap_{i=1}^n [Y_i \leqslant x]) \\ &= \prod_{i=1}^n \underbrace{P(Y_i \leqslant x)}_{=G(x)} \text{ (indépendance)} \end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{G_n(x) = G(x)^n = \begin{cases} \frac{F(x)^n}{F(a)^n} & \text{si } x \leqslant a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}.}$$

(b) Puisque f est strictement positive et continue, pour $x < a$, on a :

$$\int_x^a f(t)\mathrm{d}t > 0$$

et donc $\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t < \int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t$ c'est-à-dire $F(x) < F(a)$. Comme $0 < F(x)$, on obtient pour $x < a$:

$$\lim_{n\to+\infty} G(x) = \lim_{n\to+\infty} \Big(\underbrace{\frac{F(x)}{F(a)}}_{\in]0,1[}\Big)^n = 0.$$

Pour $x > a$, on a $G_n(x) = 1 \to 1$. Et pour $x = a$, on a $G_n(x) = G_n(a) = \frac{F(a)^n}{F(a)^n} = 1 \to 1$.

Donc on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{G_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi(x).}$

$\boxed{\psi \text{ est la fonction de répartition de la variable certaine égale à } a.}$

Pour les cubes : Comme ψ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et comme pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, on a bien $G_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi(x)$, on en déduit que $\boxed{(M_n) \text{ tend en loi vers la variable certaine égale à } a.}$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} H_n(x) &= P(Z_n \leqslant x) = P(n(a - M_n) \leqslant x) \\ &= P\left(M_n \geqslant a - \frac{x}{n}\right) = 1 - P\left(M_n < a - \frac{x}{n}\right) \\ &= 1 - P\left(M_n \leqslant a - \frac{x}{n}\right) \text{ } (M_n \text{ est à densité}) \\ &= \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left[\frac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)}\right]^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}} \end{aligned}$$

puisque $x < 0 \Leftrightarrow a - \frac{x}{n} > a$.

(b) Comme f est continue, F est une primitive de f. Donc F est $\mathcal{C}^1$ et la formule de Taylor s'applique :

$$F(a+h) = F(a) + h \underbrace{F'(a)}_{=f(a)} + \underset{h\to 0}{o}(h).$$

En particulier pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} = 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).}$$

(c) Pour $x < 0$, on a $H_n(x) = 0 \to 0$.
Pour $x \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} n\ln\left[\frac{F\left(a-\frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right] &= n\ln\left[1-\frac{f(a)}{F(a)}\times\frac{x}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= n\left[-\frac{f(a)}{F(a)}\times\frac{x}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= -x\frac{f(a)}{F(a)}+\underset{n\to+\infty}{o}(1) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} -x\frac{f(a)}{F(a)}. \end{aligned}$$

Donc toujours pour $x \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} H_n(x) &= 1-\left[\frac{F\left(a-\frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right]^n \\ &= 1-\exp\left(\underbrace{n\ln\left[\frac{F\left(a-\frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right]}_{\to -x\frac{f(a)}{F(a)}}\right) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-\exp\left(-x\frac{f(a)}{F(a)}\right). \end{aligned}$$

Donc on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{H_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \eta(x).}$

$\boxed{\eta \text{ est la fonction de répartition de la loi } \mathcal{E}\left(\frac{f(a)}{F(a)}\right).}$

Pour les cubes : Comme η est continue sur $\mathbb{R}$ et comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $H_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \eta(x)$, on en déduit que $\boxed{(Z_n) \text{ tend en loi vers une variable de loi } \mathcal{E}\left(\frac{f(a)}{F(a)}\right).}$

Exercice 2 - EDHEC ECS 2021

1. **Question préliminaire.**

(a) Comme (a_n) est croissante, on a, n étant fixé, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k \leqslant n$.
Donc pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{a_k}_{\leqslant a_n} \leqslant \frac{1}{n}\times na_n \leqslant a_n.}$$

Puis toujours pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1-1}a_k = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_k + a_n\right) \\ &= \frac{n}{n+1}b_n + \frac{1}{n+1}a_n \\ &\geqslant \frac{n}{n+1}b_n + \frac{1}{n+1}b_n \boxed{\geqslant b_n.} \end{aligned}$$

Et donc $\boxed{(b_n) \text{ est croissante.}}$

(b) Puisque (a_n) est croissante et qu'elle admet une limite ℓ. On a :

$$a_n \leqslant \ell.$$

Donc $b_n \leqslant a_n \leqslant \ell$. Donc (b_n) est majorée.
Comme (b_n) est croissante et majorée, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(b_n) \text{ admet une limite réelle.}}$ Notons-la ℓ'.
Par passage à la limite de l'inégalité $b_n \leqslant a_n$, on a :

$$\boxed{\ell' \leqslant \ell.}$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$b_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} a_k = \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{2n-1} \underbrace{a_k}_{\geqslant a_n}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k}_{=b_n} + \frac{1}{n} \times n a_n\right)$$

et donc :

$$\boxed{b_{2n} \geqslant \frac{b_n + a_n}{2}.}$$

(d) (b_{2n}) est une suite extraite de (b_n) et donc $b_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$. Par passage à la limite de l'inégalité précédente, on obtient :

$$\ell' \geqslant \frac{\ell' + \ell}{2}$$

et donc $\ell' \geqslant \ell$.
Puis comme $\ell' \leqslant \ell \leqslant \ell'$, on a $\ell' = \ell$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n.}$$

2. (a) Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** $\boxed{u_0 \text{ est bien défini}}$ et comme $u_0 = 1$, on a bien $\boxed{u_0 \geqslant 1.}$
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que u_n est bien défini et que $u_n \geqslant 1$. Montrons que u_{n+1} est bien défini et $u_{n+1} \geqslant 1$.
  Comme $u_n \geqslant 1$, on a $u_n^2 + u_n \geqslant 2$ et donc la racine de $u_n^2 + u_n$ existe. Ainsi :

  $$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

  $\boxed{\text{est bien défini.}}$
  De plus $\sqrt{u_n^2 + u_n} \geqslant \sqrt{2} \geqslant \underbrace{\sqrt{1}}_{=1}$ car la racine est croissante.
  Donc on a bien $\boxed{u_{n+1} \geqslant 1.}$

Par principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, $\boxed{u_n \text{ est bien défini pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et est supérieur ou égal à 1.}}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n^2 + u_n > u_n^2$ puisque $u_n \geqslant 1 > 0$. Donc :

$$\underbrace{u_{n+1}}_{=\sqrt{u_n^2+u_n}} > \underbrace{u_n}_{=|u_n|=\sqrt{u_n^2}}$$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$
Raisonnons par l'absurde. Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Par passage à la limite, on obtient :

$$\ell = \sqrt{\ell^2 + \ell}$$

et donc :

$$\ell^2 = \ell^2 + \ell$$

c'est-à-dire $\ell = 0$. Or comme (u_n) est croissante, on a $u_n \leqslant \ell$ et donc $u_n \leqslant 0$ ce qui est faux puisque $u_n \geqslant 1$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ n'admet pas de limite finie et diverge.}}$

D'après le théorème de la limite monotone, (u_n) admet une limite, finie si (u_n) est majorée, infinie si (u_n) n'est pas majorée. Comme (u_n) n'admet pas de limite finie, nécessairement :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$$

(c)

```python
def plus_petit_n():
    n = 1
    u = 1
    S = 1 # S1 = u0 = 1
    while S <= 1000:
        u = np.sqrt(u*u + u)
        S = S + u
        n = n+1
    return n
```

3. **Recherche d'un équivalent de u_n.**

(a) On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n = u_n\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} - u_n$$

où on a utilisé $u_n > 0$ pour le sortir de la racine. Comme $u_n \to +\infty$, on peut faire le développement limité :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} - u_n \\ &= u_n\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{u_n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{u_n}\right)\right) - u_n \\ &= \frac{1}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\,. \end{aligned}$$

Et donc on a bien $\boxed{u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.}$

(b) La fonction f est dérivable par composition sur $[1, +\infty[$ puisque $x^2 + x > 0$ dans ce cas. On a pour $x \in [1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1.$$

Pour $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} > 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x+1 > 2\sqrt{x^2+x} \text{ (car } \sqrt{\cdot} > 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (2x+1)^2 > 4(x^2+x) \text{ (car } 2x+1 \geqslant 3 > 0) \\ &\Leftrightarrow \quad 4x^2+4x+1 > 4x^2+4x \\ &\Leftrightarrow \quad 1 > 0. \end{aligned}$$

La dernière proposition étant vraie, on a toujours $f'(x) > 0$ et donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante}}$ sur $[1, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} > u_n$ car (u_n) est strictement croissante. Donc par stricte croissance de f, on a :

$$f(u_{n+1}) > f(u_n)$$

c'est-à-dire :

$$u_{n+2} - u_{n+1} > u_{n+1} - u_n.$$

Et donc $\boxed{(u_{n+1} - u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

(c) On peut donc appliquer le résultat de la question préliminaire. On a la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$$

qui converge vers $\frac{1}{2}$.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{n}\left(u_n - u_0\right).$$

D'où :

$$u_n = u_0 + nv_n.$$

Comme $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0$, on a $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$ et donc $nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$.
Puis $u_0 = 1 = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{n}{2}\right)$ et donc :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}.}$$

4. (a) Cette question demande un peu d'astuce. Il faut remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} \Leftrightarrow u_n = u_{n+1}^2 - u_n^2.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_n^2 - u_0^2 = u_n^2 - 1.}$$

On a $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4}$ et $1 = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{n^2}{4}\right)$ et donc :

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4}.}$$

(b)

```python
def plus_petit_n_2():
    n = 0
    u = 1 # u0 = 1
    while u <= np.sqrt(1001)
        u = np.sqrt(u*u + u)
        n = n+1
    return n
```

Exercice 3 - ECRICOME ECS 2022

1. (a) Calculons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - (-1)I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}\\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= 2.
\end{aligned}$$

Comme $\text{rg}(A-(-1)I_3) \neq 3$, on a $-1 \in \text{Sp}(A)$. Et comme A a le même spectre que f, on a $\boxed{-1 \in \text{Sp}(f).}$
De plus $\dim E_{-1}(A) = 3 - \text{rg}(A-(-1)I_3) = 3 - 2 = 1$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
(x,y,z) \in E_{-1}(f) & \Leftrightarrow & f((x,y,z)) = -(x,y,z) \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} y-z & = & -x \\ 2y & = & -y \\ x+4y-2z & = & -z \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ 3y & = & 0 \\ x+4y-z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ 3y & = & 0 \\ x+4y-z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ 3y & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow & (x,y,z) \in \text{Vect}((1,0,1))
\end{array}$$

Par égalité avec la dimension, $\boxed{((1,0,1)) \text{ est une base de } E_1(f).}$
De même, on a :

$$\text{rg}(A - 2I_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} = 2$$

et donc $\boxed{2 \in \text{Sp}(A) = \text{Sp}(f)}$ et $\dim E_2(f) = 3 - 2 = 1$.
Et pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rcl}
(x,y,z) \in E_2(f) & \Leftrightarrow & f((x,y,z)) = 2(x,y,z) \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} y-z & = & 2x \\ 2y & = & 2y \\ x+4y-2z & = & 2z \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} -2x+y-z & = & 0 \\ x+4y-4z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\Leftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcl} 9y-9z & = & 0 \\ x+4y-4z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} y & = & z \\ x & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow & (x,y,z) \in \text{Vect}((0,1,1))
\end{array}$$

Et de même, $\boxed{((0,1,1)) \text{ est une base de } E_2(f)}$ par égalité des dimensions.

(b) Si f est diagonalisable, puisque $\dim E_{-1}(f) + \dim_2(f) = 2 < 3$, il existe nécessairement une troisième valeur propre λ distincte de -1 et 2. De plus, comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, f a au plus 3 valeurs propres et il ne peut pas y en avoir d'autre.
Ainsi $\text{Sp}(f) = \{-1, 2, \lambda\}$. Dans une base adaptée, on a :

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

et donc $\boxed{\text{Tr}(\text{Mat}(f)) = -1 + 2 + \lambda = \lambda + 1.}$

Or $\mathrm{Tr}(A) = 0 + 2 - 2 = 0$ et la trace est invariant de similitude. Donc :

$$\boxed{\lambda + 1 = 0}$$

d'où $\lambda = -1$. $\boxed{\text{On a une contradiction puisque } \lambda \neq -1.}$

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

2. On a toujours $\boxed{\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2)}$ puisque si $x \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ alors :

$$(f + \mathrm{Id})^2(x) = (f + \mathrm{Id})(\underbrace{(f + \mathrm{Id})(x)}_{=0}) = 0.$$

Montrons que l'inclusion n'est pas une égalité. Il nous faut trouver un vecteur qui est $\mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2)$ mais pas dans $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.
Commençons par trouver un vecteur non trivial dans $\mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2)$. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}
(f + \mathrm{Id})^2(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (A + I_3)^3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad y = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x, y, z) \in \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1)).
\end{aligned}$$

Posons $u = (1, 0, 0)$. D'après ce qui précède, on a $\boxed{u \in \mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2).}$ En revanche :

$$(f + \mathrm{Id})(u) = (0, 0, 1) + (1, 0, 0) = (1, 0, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$$

Donc $\boxed{u \notin \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}).}$

Et donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \neq \mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2).}$

3. On a déjà montré que :

$$\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}((0, 1, 1))$$

et :

$$\mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2) = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$$

Comme ces familles sont libres ce sont des bases respectives de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2)$.
De plus $((1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ est échelonnée et est donc une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Par considération sur les dimensions, c'est une base.
Ainsi la concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ et d'une base de $\mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2)$ sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2).}$$

4. Soit $x \in F$. Montrons que $f(x) \in F$.
$f - 2\mathrm{Id}$ est un polynôme en f. Il commute donc avec f. On a donc :

$$(f - 2\mathrm{Id})(f(x)) = f((f - 2\mathrm{Id})(x)) = f(0) = 0.$$

On a bien $f(x) \in F$. Et donc $\boxed{f(F) \subset F.}$
De même, soit $x \in G$. Montrons que $f(x) \in G$.
On a pour les mêmes raisons :

$$(f + \mathrm{Id})^2(f(x)) = f((f + \mathrm{Id})^2(x)) = f(0) = 0.$$

On a bien $f(x) \in G$. Et donc $\boxed{f(G) \subset G.}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe $y \in F$ et $z \in G$ tel que $x = y + z$.
   On a :
$$P(f)(x) = P(f)(y) + P(f)(z) = (f + \mathrm{Id})^2(\underbrace{(f - 2\mathrm{Id})(y)}_{=0}) + (f - 2\mathrm{Id})(\underbrace{(f + \mathrm{Id})^2(z)}_{=0}) = 0.$$
   D'où $\boxed{P(f) = 0.}$
6. π_1 et π_2 commutent car $\boxed{\text{ce sont des polynômes en } f.}$
7. (a) On a :
$$\begin{aligned}\pi_2 \circ \pi_1 &= \left(-\frac{1}{9}(f + 4\mathrm{Id}) \circ (f - 2\mathrm{Id})\right) \circ \left(\frac{1}{9}(f + \mathrm{Id})^2\right) \\ &= -\frac{1}{81}(f + 4\mathrm{Id}) \circ \underbrace{P(f)}_{=0} \\ &= \boxed{0.}\end{aligned}$$
   (b) Soit $x \in \mathrm{Im}(\pi_1)$. Il existe donc $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $\pi_1(y) = x$.
   On a :
$$\pi_2(x) = \pi_2(\pi_1(y)) = 0.$$
   Donc $x \in \mathrm{Ker}(\pi_2)$.
   D'où $\boxed{\mathrm{Im}(\pi_1) \subset \mathrm{Ker}(\pi_2).}$
8. (a) On a :
$$\begin{aligned}\pi_1 + \pi_2 &= \frac{1}{9}(f + \mathrm{Id})^2 - \frac{1}{9}(f + 4\mathrm{Id}) \circ (f - 2\mathrm{Id}) \\ &= \frac{1}{9}(f^2 + 2f + \mathrm{Id}) - \frac{1}{9}(f^2 + 4f - 2f - 8\mathrm{Id}) \\ &= \boxed{\mathrm{Id}.}\end{aligned}$$
   (b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(\pi_2)$. On a :
$$x = (\pi_1 + \pi_2)(x) = \pi_1(x) + \underbrace{\pi_2(x)}_{=0} = \pi_1(x).$$
   Donc $x \in \mathrm{Im}(\pi_1)$.
   D'où $\boxed{\mathrm{Ker}(\pi_2) \subset \mathrm{Im}(\pi_1).}$
9. Avec les deux inclusions précédentes, on en déduit que $\boxed{\mathrm{Ker}(\pi_2) = \mathrm{Im}(\pi_1).}$
   De plus, comme π_1 et π_2 commutent, on a $\pi_1 \circ \pi_2 = 0$ et donc $\mathrm{Im}(\pi_2) \subset \mathrm{Ker}(\pi_1)$.
   D'après le théorème du rang, on a :
$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Im}(\pi_2) &= 3 - \dim \mathrm{Ker}(\pi_2) \\ &= 3 - \dim \mathrm{Im}(\pi_1) \\ &= \dim \mathrm{Ker}(\pi_1).\end{aligned}$$
   Donc par égalité des dimensions, on a $\boxed{\mathrm{Ker}(\pi_1) = \mathrm{Im}(\pi_2).}$
10. On a :
$$\pi_1^2 = \pi_1 \circ (\mathrm{Id} - \pi_2) = \pi_1 - 0 = \pi_1$$
   et donc $\boxed{\pi_1 \text{ est un projecteur.}}$
   On a de même :
$$\pi_2^2 = \pi_2 \circ (\mathrm{Id} - \pi_1) = \pi_2 - 0 = \pi_2$$
   et donc $\boxed{\pi_2 \text{ est un projecteur.}}$

11. π_2 est le projecteur sur $\mathrm{Im}(\pi_2)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\pi_2)$.
Or $\mathrm{Im}(\pi_2) = \mathrm{Ker}(\pi_1) = \mathrm{Ker}(\frac{1}{9}(f+\mathrm{Id})^2) = \mathrm{Ker}((f+\mathrm{Id})^2) = G$.
Et $\mathrm{Ker}(\pi_2) = \mathrm{Ker}(-\frac{1}{9}(f+4\mathrm{Id})\circ(f-2\mathrm{Id}))$. $f+4\mathrm{Id}$ est inversible puisque $4 \notin \mathrm{Sp}(f)$.
Donc $x \in \mathrm{Ker}(\pi_2) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}) \Leftrightarrow x \in F$.
D'où $\boxed{\pi_2 \text{ est le projecteur sur } G \text{ parallèlement à } F.}$
Comme $\mathrm{Ker}(\pi_1) = \mathrm{Im}(\pi_2) = G$ et $\mathrm{Im}(\pi_2) = \mathrm{Ker}(\pi_1) = F$, on en déduit que
$\boxed{\pi_1 \text{ est le projecteur sur } F \text{ parallèlement à } G.}$
12. π_1 et π_2 sont des polynômes de f. Donc g est un polynôme de f comme combinaison linéaire.
Et h est à son tour un polynôme en f comme combinaison linéaire.
13. On connaît une base de F : $((0,1,1))$. Et on connaît une base de G : $((1,0,0),(0,0,1))$. Calculons la matrice de G dans la base concaténée : $\mathcal{B} = ((0,1,1),(1,0,0),(0,0,1))$.
On a :
$$\begin{array}{rcl} \pi_1((0,1,1)) & = & (0,1,1) \\ \pi_1((1,0,0)) & = & (0,0,0) \\ \pi_1((0,0,1)) & = & (0,0,0) \end{array}$$
car π_1 est le projecteur sur F parallèlement à G. Et on a :
$$\begin{array}{rcl} \pi_2((0,1,1)) & = & (0,0,0) \\ \pi_2((1,0,0)) & = & (1,0,0) \\ \pi_2((0,0,1)) & = & (0,0,1) \end{array}$$
car π_2 est le projecteur sur G parallèlement à F.
Donc :
$$\begin{array}{rcl} g((0,1,1)) & = & 2\times(0,1,1) \\ g((1,0,0)) & = & -1\times(1,0,0) \\ g((0,0,1)) & = & -1\times(0,0,1) \end{array}$$
Et donc :
$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$
14. Calculons :
$$\begin{array}{rcl} h & = & f-g \\ & = & f-2\pi_1+\pi_2 \\ & = & f\circ(\pi_1+\pi_2)-2\pi_1+\pi_2 \\ & = & \boxed{(f-2\mathrm{Id})\circ\pi_1+(f+\mathrm{Id})\circ\pi_2.} \end{array}$$
Et donc :
$$\begin{array}{rcl} h^2 & = & ((f-2\mathrm{Id})\circ\pi_1+(f+\mathrm{Id})\circ\pi_2)^2 \\ & = & (f-2\mathrm{Id})^2\circ\underbrace{\pi_1^2}_{=\pi_1}+2(f-2\mathrm{Id})\circ(f+\mathrm{Id})\circ\underbrace{\pi_1\circ\pi_2}_{=0}+(f+\mathrm{Id})^2\circ\underbrace{\pi_2^2}_{=\pi_2} \\ & & \text{(tout commute car ce sont des polynômes en } f\text{)} \\ & = & \dfrac{1}{9}(f-2\mathrm{Id})^2\circ(f+\mathrm{Id})^2-\dfrac{1}{9}(f+\mathrm{Id})^2\circ(f+4\mathrm{Id})\circ(f-2\mathrm{Id}) \\ & = & \dfrac{1}{9}(f-2\mathrm{Id})\circ P(f)-\dfrac{1}{9}(f+4\mathrm{Id})\circ P(f)\boxed{=0.} \end{array}$$
15. On a bien $\boxed{f = g+h, \text{ où } g \text{ est diagonalisable et } h \text{ est nilpotent (d'ordre 2).}}$

Problème 4 - EDHEC ECS 2021

Partie I - Calcul d'intégrales utiles pour la suite.

1. Pour $p \in \mathbb{N}$, on a :
$$\boxed{I(p,0) = \int_0^1 x^p \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}.}$$
Et de même pour $q \in \mathbb{N}$, on a :
$$\boxed{I(0,q) = \int_0^1 (1-x)^q \mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{q+1}.}$$

2. Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$. On a :
$$I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \mathrm{d}x.$$
On pose $u : x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$ et $v :\mapsto (1-x)^q$ toutes deux $\mathcal{C}^1$. On peut donc calculer par IPP :
$$\begin{aligned} I(p,q) &= \int_0^1 \underbrace{x^p}_{=u'(x)} \underbrace{(1-x)^q}_{=v(x)} \mathrm{d}x \\ &= \left[\underbrace{\frac{x^{p+1}}{p+1}}_{=u(x)} \underbrace{(1-x)^q}_{=v(x)}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\frac{x^{p+1}}{p+1}}_{=u(x)} \underbrace{(-q)(1-x)^{q-1}}_{=v'(x)} \mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1} \mathrm{d}x \\ &= \boxed{\frac{q}{p+1} I(p+1, q-1).} \end{aligned}$$

3. Procédons par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$.
   - **Initialisation :** Pour $q = 0$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:
   $$\frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q,0) = \frac{p!0!}{(p+0)!} I(p+0,0) = I(p,0) = I(p,q).$$
   Donc H_0 est vraie.
   - **Hérédite :** Soit $q \in \mathbb{N}$. On suppose H_q vraie. Montrons H_{q+1}.
   Soit $p \in \mathbb{N}$. On a :
   $$\begin{aligned} I(p,q+1) &= \frac{q+1}{p+1} I(p+1,q) \text{ (question précédente)} \\ &= \frac{q+1}{p+1} \times \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!} I(p+1+q,0) \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= \boxed{\frac{p!(q+1)!}{(p+(q+1))!} I(p+(q+1),0).} \end{aligned}$$
   Donc H_{q+1} est vraie.

4. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On a :
$$\boxed{I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q,0) = \frac{p!q!}{(p+q)!} \frac{1}{(p+q+1)} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.}$$
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve :
$$\boxed{I(n,n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

Partie II - Étude d'une suite de variables aléatoires.

5. Vérifions que b_n est une densité.
   - **Continuité :** b_n est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ par opérations usuelles.
   - **Positivité :** b_n est bien positive sur $\mathbb{R}$.
   - **Intégrale :** On a :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 b_n(x)\mathrm{d}x$$
   et est donc convergente comme intégrale sur un segment. On a de plus :
   $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^n(1-x)^n\mathrm{d}x \\ &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}I(n,n) \\ &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \boxed{1.}\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{b_n \text{ est bien une densité de probabilité.}}$

6. On a pour tout $x \in [0,1]$:
   $$b_0(x) = \frac{(2\times 0+1)!}{(0!)^2}x^0(1-x)^0 = 1.$$
   Avec $b_0(x) = 0$ si $x \notin [0,1]$, on reconnaît la densité de la loi uniforme sur $[0,1]$.
   Donc $\boxed{X_0 \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]).}$

7. (a) X_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale suivante converge absolument :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x)\mathrm{d}x.$$
   Cette intégrale converge absolument puisque $b_n(x) = 0$ si $x \notin [0,1]$ et la restriction de $x \mapsto xb_n(x)$ à $[0,1]$ est continue. C'est donc une intégrale sur un segment. De plus, on a :
   $$\boxed{E(X_n) = \int_0^1 x \times \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^n(1-x)^n\mathrm{d}x = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}I(n+1,n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\frac{n!(n+1)!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}.}$$

   (b) On procède de même :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 b_n(x)\mathrm{d}x$$
   converge absolument en tant qu'intégrale sur un segment déguisée en intégrale généralisée. On a alors :
   $$\begin{aligned}E(X_n^2) &= \int_0^1 x^2 \times \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^n(1-x)^n\mathrm{d}x = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}I(n+2,n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\frac{n!(n+2)!}{(2n+3)!} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{n+2}{2(2n+3)}.\end{aligned}$$
   X_n admet un moment d'ordre 2 donc admet une variance et on applique alors la formule de Huygens :
   $$\boxed{V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4} = \frac{2n+4-(2n+3)}{4(2n+3)} = \frac{1}{4(2n+3)}.}$$

   (c) X_n admet une espérance et une variance. Donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a pour tout $\epsilon > 0$:
   $$P\left(|X_n - E(X_n)| \leqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{V(X_n)}{\epsilon^2}.$$

Donc :

$$0 \leqslant P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \epsilon\right) \leqslant \underbrace{\frac{1}{4\epsilon^2(2n+3)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}.$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a pour tout $\epsilon > 0$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \epsilon\right) = 0.}$$

Pour les cubes : On en déduit que la suite (X_n) tend en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{2}$ ce qui s'écrit :

$$\boxed{X_n \xrightarrow{P} \frac{1}{2}.}$$

Partie III - Simulation informatique de X_n.

8. On a poru tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.}$$

9. (a) V_{2n+1} est l'instant d'arrivée de la $(2n+1)^{\text{ème}}$ personne, c'est-à-dire de la dernière personne. C'est donc le maximum des moments d'arrivées. On a :

$$\boxed{V_{2n+1} = \max(U_1, \dots, U_{2n+1}).}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$G_{2n+1}(x) = P(V_{2n+1} \leqslant x) = P(\max(U_1, \dots, U_{2n+1}) \leqslant x)$$

Or le maximum est inférieur à x si et seulement si toutes les valeurs sont inférieures à x. Donc :

$$\begin{aligned} G_{2n+1}(x) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{2n+1} [U_i \leqslant x]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) \text{ (indépendance)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} F_U(x) = (F_U(x))^n \\ &= \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.} \end{aligned}$$

10. (a) De la même manière, on a :

$$\boxed{V_1 = \min(U_1, \dots, U_{2n+1}).}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$P(V_1 > x) = P(\min(U_1, \dots, U_{2n+1}) > x)$$

Or le minimum est supérieur à x si et seulement si toutes les valeurs sont supérieures à x. Donc :

$$\begin{aligned} P(V_1 > x) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{2n+1} [U_i > x]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) \text{ (indépendance)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (1 - P(X_i \leqslant x)) = (1 - F_U(x))^n \\ &= \boxed{\left\{ \begin{array}{cl} 1 & \text{si } x < 0 \\ (1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{array} \right. .} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{G_1(x) = P(V_1 \leqslant x) = 1 - P(V_1 > x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{array} \right. .}$$

11. Je propose deux solutions différentes. Une courte qui fait usage de `numpy` au maximum et se fait en un minimum de lignes au prix d'une plus grande utilisation de la mémoire :

```python
def V(n):
    U = rd.random(n)
    V_1 = np.min(U)
    V_2n_plus_1 = np.max(U)
    return V_1, V_2n_plus_1
```

Et une seconde fonction qui fait la même chose à la main avec une utilisation minimale de la mémoire :

```python
def V(n):
    V_1 = 1
    V_2n_plus_1 = 0
    for i in range(n):
        U = rd.random()
        if U > V_2n_plus_1:
            V_2n_plus_1 = U
        if U < V_1:
            V_1 = U
    return V_1, V_2n_plus_1
```

12. (a) Il faut remarquer que pour $x \in [0,1]$, $V_{n+1} \leqslant x$ si et seulement si au moins $n+1$ variables sont plus petites que x.
Pour tout $k \in [\![1, 2n+1]\!]$, notons A_k l'événement $[U_k \leqslant x]$. Comme les variables U_k sont indépendantes, les événements A_k le sont également. Et ces événements sont tous de probabilités $F_U(x) = x$ (puisque $x \in [0,1]$).
Notons Y la variable égale au nombre d'événements A_k réalisés. Par définition, on a $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(2n+1, x)$.
On a alors :
$$G_{n+1}(x) = P(V_{n+1} \leqslant x) = P(Y \geqslant n+1).$$
On a $[Y \geqslant n+1] = \bigcup_{k=n+1}^{2n+1} [Y = k]$ l'union étant disjointe et donc :
$$\boxed{G_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} P(Y=k) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}.}$$

(b) On a supposé que V_{n+1} était une variable à densité. Puisque G_{n+1} est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1, +\infty[$, on calcule la dérivée sur G_{n+1} sur ces intervalles.

Pour $x < 0$ ou $x > 1$, on a :

$$G'_{n+1}(x) = 0.$$

Pour $x \in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
G'_{n+1}(x) &= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(kx^{k-1}(1-x)^{2n+1-k} + x^k(-1) \underbrace{(2n+1-k)}_{=0 \text{ si } k=2n+1}(1-x)^{2n-k} \right) \\
&= \frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+1-(2n+1))!}(2n+1)x^{2n+1-1}(1-x)^{2n+1-(2n+1)} \\
&+ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} \left(kx^{k-1}(1-x)^{2n+1-k} - (2n+1-k)x^k(1-x)^{2n-k} \right) \\
&= (2n+1)x^{2n} \\
&+ \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{(2n+1)!}{(k-1)!(2n+1-k)!}x^{k-1}(1-x)^{2n+1-k} - \frac{(2n+1)!}{k!(2n-k)!}x^k(1-x)^{2n-k} \right) \\
&= (2n+1)x^{2n} \\
&+ \sum_{k=n+1}^{2n} \left((2n+1)\binom{2n}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{2n+(k-1)} - (2n+1)\binom{2n}{k} x^k(1-x)^{2n-k} \right) \\
&= (2n+1)x^{2n} + (2n+1)\left(\binom{2n}{n} x^n(1-x)^{2n-n} - \binom{2n}{2n} x^{2n}(1-x)^{2n-2n} \right) \\
&= (2n+1)x^{2n} + (2n+1)\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n(1-x)^n - x^{2n} \right) \\
&= \boxed{\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^n(1-x)^n.}
\end{aligned}$$

On a donc une densité de V_{n+1} donnée par :

$$\boxed{g_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^n(1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}.}$$

On reconnaît la densité b_n de X_n. Donc $\boxed{V_{n+1} \text{ et } X_n \text{ ont la même loi.}}$

(c) $\boxed{\text{Cette fonction renvoie 8.}}$

(d) Si on donne un nombre impaire (par exemple $2n+1$) de nombre, **np.median** renverra bien la valeur de celle du milieu (la numéro $n+1$ dans l'exemple). En l'occurrence, on peut écrire :

```
def Vn(n):
    U = rd.random(2*n+1)
    V = np.median(U)
    return V
```

Cette fonction simule V_{n+1} et donc X_n qui a la même loi.