DS4 - Réduction, Vecteurs aléatoires

Samedi 13/01/2024 - 4h

Calculatrice interdite

1. Les exercices sont indépendants.
2. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
3. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
4. Encadrez ou soulignez vos résultats.

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques **Python** *sont importées comme suit :*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - EDHEC ECS 2022 (adapté)

On désigne par a un réel et on considère une variable aléatoire X, de densité f strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$, dont la fonction de répartition est notée F.
On pose :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{F(a)} & \text{si } x \leqslant a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}.$$

1. Montrer que g est bien définie et peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire Y.
2. On note G la fonction de répartition de Y.
   (a) Exprimer, pour tout réel x, $G(x)$ à l'aide de F.
   (b) Vérifier que l'on a, pour tout réel x :

$$G(x) = P_{[X \leqslant a]}(X \leqslant x).$$

Dans la suite, on considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité dont on note G_n la fonction de répartition.
   (a) Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de G, puis à l'aide de F.
   (b) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geqslant a \end{cases}$
   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi(x)$. De quelle loi ψ est-elle la fonction de répartition ?
   Pour les cubes : Que peut-on en déduire sur la suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$?
4. On pose $Z_n = n(a - M_n)$ et note H_n la fonction de répartition de Z_n.
   (a) Vérifier que l'on a :

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left[\frac{F\left(a-\frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right]^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

   (b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} = 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

(c) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{f(a)}{F(a)}x\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \eta(x)$. De quelle loi η est-elle la fonction de répartition ?

Pour les cubes : Que peut-on en déduire sur la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$?

Exercice 2 - EDHEC ECS 2021

1. **Question préliminaire.** On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et de limite ℓ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

(a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $b_n \leqslant a_n$, puis étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

(b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leqslant \ell$.

(c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$b_{2n} \geqslant \frac{b_n + a_n}{2}.$$

(d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et supérieur ou égal à 1.

(b) Étudier les variations de la suite (u_n), puis établir que la suite (u_n) diverge et donner sa limite.

(c) Compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle permette de déterminer et de retourner la plus petite valeur de n pour laquelle on a $S_n > 1000$.

```python
def plus_petit_n():
    n = 1
    u = 1
    S = 1 # S1 = u0 = 1
    while S <= 1000:
        u = ...
        S = ...
        n = n+1
    return ...
```

3. **Recherche d'un équivalent de u_n.**

(a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$.

(b) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$, puis en déduire que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) Utiliser la première question pour établir sur $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$.

4. (a) Exprimer S_n en fonction de u_n puis en déduire un équivalent de S_n pour n au voisinage de $+\infty$.

(b) Compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle fasse le même travail que celle de la question 2c sans calculer S_n :

```python
def plus_petit_n_2():
    n = 0
    u = 1 # u0 = 1
```

```
    while u <= ...
        u = ...
        n = n+1
    return ...
```

Exercice 3 - ECRICOME ECS 2022

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
On dit qu'un endomorphisme h est nilpotent quand il existe un entier naturel p tel que h^p soit l'endomorphisme nul.
L'objectif de ce problème est de montrer que f est la somme de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent, dont l'un est diagonalisable et l'autre est nilpotent.

1. (a) Vérifier que -1 et 2 sont des valeurs propres de f et déterminer les sous-espaces propres associés.
   (b) On suppose que f est diagonalisable.
   En étudiant la trace de A, aboutir à une contradiction.
   Que peut-on en déduire sur f ?
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2)$ et que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \neq \mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2)$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2)$.

Pour simplifier les notations, on note doénavant :

$$F = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Ker}((f + \mathrm{Id})^2).$$

4. Montrer que F et G sont stables par f.
5. On note $P = (X + 1)^2(X - 2)$. Justifier que $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

On note dorénavant $\pi_1 = \frac{1}{9}(f + \mathrm{Id})^2$ et $\pi_2 = -\frac{1}{9}(f + 4\mathrm{Id}) \circ (f - 2\mathrm{Id})$.

6. Justifier que les endomorphismes π_1 et π_2 commutent.
7. (a) Que vaut l'endomorphisme $\pi_2 \circ \pi_1$?
   (b) En déduire une inclusion entre $\mathrm{Ker}(\pi_2)$ et $\mathrm{Im}(\pi_1)$.
8. (a) Montrer que $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{Id}$.
   (b) En déduire une inclusion entre $\mathrm{Ker}(\pi_2)$ et $\mathrm{Im}(\pi_1)$.
9. Justifier que $\mathrm{Ker}(\pi_2) = \mathrm{Im}(\pi_1)$ et que $\mathrm{Ker}(\pi_1) = \mathrm{Im}(\pi_2)$.
10. Déduire des questions 7a et 8a que π_1 et π_2 sont des projecteurs.
11. Montrer que π_2 est le projecteur sur G parallèlement à F. Identifier π_1.

On pose maintenant :

$$g = 2\pi_1 - \pi_2 \quad \text{et} \quad h = f - g.$$

12. Justifier que g et h sont des polynômes de l'endomorphisme f.
13. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de g dans cette base soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
14. Montrer que $h = (f - 2\mathrm{Id}) \circ \pi_1 + (f + \mathrm{Id}) \circ \pi_2$.
    En déduire que $h^2 = 0$.
15. Conclure.

Problème 4 - EDHEC ECS 2021

Partie I - Calcul d'intégrales utiles pour la suite.
Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose $I(p, q) = \int_0^1 x^p(1 - x)^q \mathrm{d}x$. On a, en particulier $I(p, 0) = \int_0^1 x^p \mathrm{d}x$ et $I(0, q) = \int_0^1 (1 - x)^q \mathrm{d}x$.

1. Donner les valeurs de $I(p,0)$ et $I(0,q)$.
2. Montrer que, pour tout couple (p,q) de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}^\star$, on a l'égalité :
$$I(p,q)=\frac{q}{p+1}I(p+1,q-1).$$
3. Pour tout q de $\mathbb{N}$, on considère la propriété H_q : « $\forall p\in\mathbb{N}, I(p,q)=\frac{p!q!}{(p+q)!}I(p+q,0)$ ».
Montrer par récurrence sur q que H_q est vraie pour tout entier naturel q.
4. Donner explicitement, pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, l'expression de $I(p,q)$ en fonctiond e p et q, puis en déduire pour tout entier naturel n, la valeur $I(n,n)$ en fonction de n.

Partie II - Étude d'une suite de variables aléatoires.

Pour tout entier naturel n, on pose $b_n(x)=\begin{cases}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^n(1-x)^n & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

5. Montrer que b_n peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où X_n admet b_n comme densité.

6. Reconnaître la loi de X_0.
7. (a) Utiliser la première partie pour montrer que X_n possède une espérance et que $E(X_n)=\frac{1}{2}$.
   (b) Toujours en utilisant la première partie, montrer que X_n possède une variance et exprimer $V(X_n)$ en fonction de n.
   (c) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :
$$\forall\epsilon>0,\ \lim_{n\to+\infty}P\left(\left|X_n-\frac{1}{2}\right|\leqslant\epsilon\right)=0.$$
   Pour les cubes : Que peut-on en déduire pour la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$?

Partie III - Simulation informatique de X_n.

On considère $2n+1$ variables aléatoires U_1, U_2, ..., U_{2n+1} définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.
On suppose que ces variables représentent respectivement les instants d'arrivées de $2n+1$ personnes A_1, A_2,...,A_{2n+1} à leur lieu commun de rendez-vous. Pour tout k de $[\![1;2n+1]\!]$, on note alors V_k l'instant d'arrivée de la personne arrivée la k^{e} au rendez-vous (cette personne n'étant pas forcément A_k). On admet que V_k est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi $(\Omega,\mathcal{A},P)$, et on note G_k sa fonction de répartition.

8. On note F_U la fonction de répartition commune aux variables U_1, U_2,..., U_{2n+1}. Rappeler l'expression de $F_U(x)$ selon que $x<0$, $0\leqslant x\leqslant 1$ ou $x>1$.
9. (a) Écrire la variable V_{2n+1} en fonction de U_1, U_2,..., U_{2n+1}.
   (b) En déduire $G_{2n+1}(x)$ pour tout réel x.
10. (a) Écrire la variable V_1 en fonction de U_1, U_2,..., U_{2n+1}.
    (b) En déduire, pour tout réel x, la probabilité $P(V_1>x)$ puis déterminer $G_1(x)$ pour tout réel x.
11. Écrire une fonction `Python` peremttant de simuler V_1 et V_{2n+1} pour une valeur de n passée en paramètre.
12. (a) Montrer que l'on a :
$$\forall x\in[0,1],\ G_{n+1}(x)=\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}x^k(1-x)^{2n+1-k}.$$
    (b) Déterminer une densité g_{n+1} de V_{n+1} et en déduire que V_{n+1} suit la même loi que X_n.
    (c) On considère la fonction `Python` suivante :

```python
def f_mystere():
    U = np.array([8,2,9,13,23,1,5])
    V = np.median(U)
    return V
```

    Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?
    (d) Écrire une fonction `Python` permettant de simuler X_n.