DM7 - Endomorphismes symétriques

Pour le mardi 23/01/2024

Exercice 1 - ECRICOME ECS 2005

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Trois réels a, b, c étant donnés, on pose :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer trois matrices I, J, K dont les coefficients ne dépendent pas de a, b, c telles que :

$$M(a,b,c) = aI + bJ + cK.$$

   Calculer J^2, K^2 et K^3. Déterminer une relation entre I, J et K^2, ainsi qu'un polynôme annulateur de K. Quelles sont les valeurs propres possibles pour K ?

2. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, telle que $D = ({}^tPKP)$ soit une matrice diagonale.
   Déterminer P et D vérifiant les conditions précédentes et telles que $d_{11} < d_{22} < d_{33}$ (où $d_{i,j}$ est le coefficient d'indices i, j de D).

3. En écrivant $M = M(a,b,c)$ en fonction de I, K, K^2, déterminer la matrice $({}^tP)MP$.
   En déduire les valeurs propres de la matrice M.
   Discuter suivant les valeurs de a, b, c, le nombre de valeurs propres distinctes de M et préciser dans chaque cas les sous-espaces propres associés.

4. On suppose dans cette question $a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{2}$, on note $M = M(4,2,\sqrt{2})$.
   On pose $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = ({}^tP)X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

   (a) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par :

   $$f(x,y,z) = \frac{({}^tXMX)}{\|X\|^2}.$$

   i. Montrer que $\|X\|^2 = \|X'\|^2$ puis que :

   $$f(x,y,z) = \frac{4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

   ii. Montrer que 2 et 8 sont respectivement les minimum et maximum de f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et déterminer les points en lesquels ils sont atteints.

   (b) On cherche désormais à résoudre l'équation $B^2 = M$ d'inconnue $B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

   i. Soit B une solution de l'équation (s'il en existe).
   Montrer que B et M commutent.
   En déduire que si X appartient au sous-espace propre E_λ de M attaché à la valeur propre λ, alors BX appartient aussi à E_λ.
   Montrer que les vecteurs propres de M sont également vecteurs propres de B.
   Justifier alors que $({}^tP)BP$ est une matrice diagonale.

   ii. Résoudre l'équation $\Delta^2 = {}^tPMP$ d'inconnue $\Delta \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et donner le nombre de solutions de $B^2 = M$.