

DM8 - CALCUL DIFFÉRENTIEL D'ORDRE 2

Pour le jeudi 01/02/2024

Exercice 1 - EDHEC ECS 2018

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On note I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1. (a) Déterminer le rang de J_n . En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
- (b) Vérifier que le vecteur V_n élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, dont toutes les composantes sont égales à 1, est vecteur propre de J_n .
- (c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n .

Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R}^n par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f_n(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_k \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n x_k^2 \right).$$

2. Montrer que f_n est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^n .

3. (a) Montrer que, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\partial_i(f_n)(x) = \left(1 - 2x_i \sum_{k=1}^n x_k \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)$.
- (b) En déduire que f_n possède deux points critiques $a = \frac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \dots, 1)$ et $b = -a$.

4. (a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f_n .

(b) Vérifier que la hessienne de f en a est $H_n(a) = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)$.

(c) À l'aide de la première question, donner les valeurs propres de $H_n(a)$.

(d) En déduire que f_n possède un extremum local en a .

(e) Sans refaire tous les calculs, donner une conclusion concernant le point critique b .

5. (a) Étudier la fonction h qui a tout t de \mathbb{R}_+ , associe $h(t) = te^{-t^2}$.

(b) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs points choisis de \mathbb{R}^n , muni de son produit scalaire canonique, montrer que :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

(c) Déduire des deux questions précédentes que f_n admet en a et b des extrema globaux.

6. Question d'informatique.

(a) Écrire une fonction Python permettant de calculer et de renvoyer $H_n(a)$ pour une valeur de n passée en paramètre.

(b) Dans le cas $n = 2$, la nappe suivante est-elle acceptable en tant que représentation graphique de la fonction f_2 ? Justifier.

