TD12 - Calcul différentiel d'ordre 2

1 Topologie

Exercice 1 ⋆

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, bornés. On pourra s'aider d'un dessin lorsque c'est possible (c'est-à-dire pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$).

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\leq 3\},\\ B &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ 1<z\mathrm{e}^{x+y}<2\},\\ C &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ xyz\neq 1\},\\ D &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2-1\leq y\leq 1-x^2\},\\ E &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x+2y|=1 \text{ ou } |y+2x|\geq 4\}. \end{aligned}$$

2 Études de fonctions

Exercice 2 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=x^2(1+y)^3+y^2$.

1. Montrer que f possède un seul point critique.
2. Vérifier que si $\|(x,y)\|\leq 1$ alors $f(x,y)\geq 0$.
3. En déduire que f possède un minimum local en son point critique. Est-ce un minimum global ?

Exercice 3 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\Omega=]0,1[\times]0,1[$ par $f(x,y)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y}$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω et calculer ses dérivées partielles premières et secondeS.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Montrer que f admet un extremum local sur Ω.

Exercice 4 ⋆⋆

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & x^3+xy+y^3\end{array}\right.,$$

$$g:\left\{\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^\star)^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & 4xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.\end{array}\right.,$$

$$h:\left\{\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}_+^\star)^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2+\frac{1}{x+y}\end{array}\right..$$

Exercice 5 ⋆⋆

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^3+y^2-xy+z^2$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. En déduire les extrema locaux de f. Sont-ils globaux ?

Exercice 6 ⋆⋆

Soit $f(x,y)=x^2+y^2+2xy+xy^3$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un unique point critique.
2. Déterminer les valeurs propres de la hessienne en ce point critique. Peut-on conclure quant à la nature de ce point critique ?
3. Étudier les signes de $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ et conclure.

Exercice 7 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xyz$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. Montrer que f admet exactement cinq points critiques, dont le point $(0,0,0)$.
3. Déterminer la matrice hessienne de f en $(0,0,0)$ et en déduire que f possède un minimum local en $(0,0,0)$. Est-ce un minimum global ?
4. Pour chacun des autres points critiques, vérifier que 4 est valeur propre de la matrice hessienne, et déterminer si f admet ou non un extremum local en ce point.

Exercice 8 ⋆⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^\star)^2$ par $f(x,y)=x\ln y-y\ln x$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ et déterminer son gradient.
2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}+^\star$ par $\varphi(t)=\ln t-t+\frac{1}{t}$.
   Montrer que si (x,y) est un point critique de f alors $\varphi(\ln y)=0$.
3. En étudiant le sens de variations de φ, montrer que f possède un unique point critique (x_0,y_0).
4. Montrer que pour tout $\alpha\in[0,1[$, $f(x_0+\alpha,y_0-\alpha)=-f(x_0-\alpha,y_0+\alpha)$. f admet-elle un extremum local sur $(\mathbb{R}_+^\star)^2$?

Exercice 9 ⋆⋆⋆

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer que f admet 4 points critiques.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $g(x) = f(x,0)$.
   (a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$, $f(x,y) \geq g(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variation de g.
   (c) En déduire que f admet un minimum local en $(\mathrm{e}^{-1}, 0)$.
4. Soit $h : x \mapsto f(x,1) - f(0,1)$.
   (a) Montrer que $h(x)$ est du signe de x.
   (b) En déduire que f n'admet pas d'extremum local en $(0,1)$.

Exercice 10 ⋆⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \left(1 - \sum_{k=1}^n x_k\right)^2$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. Montrer que f admet un unique point critique $a = (a_1,\dots,a_n)$. On note $A = \nabla^2 f(a_1,\dots,a_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Calculer $\mathrm{rg}(A - 2I_n)$ puis déterminer les valeurs propres de A. En déduire que f admet un extremum local en $(a_1,\dots,a_n)$.
4. Soit $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et posons $h = x - a$.
   En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $g : t \mapsto f(a+th)$, montrer que $f(x) \geq f(a)$. En déduire que f possède un extremum global.

Exercice 11 ⋆⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \left(1 + y + xy - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^y$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, déterminer ses dérivées partielles premières et secondes.
2. Montrer que f admet un unique point critique (α,β).
3. Vérifier que la détermination des valeurs propres de $\nabla^2 f(\alpha,\beta)$ ne suddit pas à déterminer la nature de ce point critique.
4. Déterminer un vecteur propre u de $\nabla^2 f(\alpha,\beta)$ associé à la valeur propre 0.
5. En étudiant la fonction $t \mapsto f((\alpha,\beta) + tu)$, déterminer la nature du point critique (α,β).

3 Exercices de concours

Exercice 12 - ECRICOME 2016 ⋆⋆

Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y\}$ et soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 - \ln(y-x)$.

1. Justifier que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et calculer ses dérivées partielles premières et secondes.
2. Montrer que f admet un unique point critique sur $\mathcal{D}$.
3. Déterminer la nature locale de ce point critique.

Exercice 13 - Oral HEC 2018 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soient X_1, ..., X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, admettant chacune une espérance et un écart-type notés respectivement :

$$\mu \text{ et } \sigma \neq 0.$$

Pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$f(x_1,\dots,x_n) = E\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i X_i - \mu\right)^2\right).$$

1. (a) Justifier l'égalité :
   $f(x_1,\dots,x_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \mu^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right)^2$.
   (b) Justifier, pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité :
   $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$.
   (c) En déduire le minimum de f sur l'ensemble $\mathcal{H} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + \dots + x_n = 1\}$.
2. (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et trouver son unique point critique a.
   (b) Justifier que pour tout $h = (h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) \\ &+ 2\int_0^1 (1-t)\left(\mu^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^n h_i^2\right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

   (c) En déduire que f admet un minimum global en a.