TD13 - Convergences des variables aléatoires

1 Convergence en probabilité

Exercice 1 ⋆⋆

On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ 1-\Phi(x) \leq \frac{1}{2x^2}$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty}(1-\Phi(t))\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 2 ⋆⋆

1. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.
Montrer que :
$\forall a \in]0,+\infty[,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$.
2. **Application :** On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% de la proportion de boules rouges restera comprise en $0,35$ et $0,45$?

Indication : poser une suite (Y_i) de v.a.r. de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Exercice 3 ⋆⋆

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi exponentielle de paramètre 1, et soit $x > \frac{1}{2}$. On pose alors :

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^{x-1}.$$

1. Montrer que $U_n \xrightarrow{P} \Gamma(x)$.
2. En déduire une fonction `Python` qui prend en paramètre un réel x strictement positif et qui retourne une valeur approchée de $\Gamma(x)$.
3. Comment adapter ce programme pour obtenir une valeur approchée de $\Gamma(x)$ avec $0 < x \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 4 ⋆⋆

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs positives, ayant toutes une espérance et une variance. On suppose que :
$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = m$ et $\lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0$.
En appliquant l'inégalité de Markov à $(X_n - m)^2$, montrer que $X_n \xrightarrow{P} m$.

Exercice 5 ⋆⋆

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p. On note $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et on pose $S_n = \frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}$.
Montrer que la suite (S_n) converge en probabilités vers la variable certaine égale à $2p$.

Exercice 6 - Minimum de Rayleigh ⋆⋆

Soit $\sigma > 0$. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes, de densité f. On pose alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n).$$
Montrer que $\forall \epsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P(|Y_n| \leq \epsilon) = 1$. Qu'en déduire sur la suite (Y_n) ?

Exercice 7 ⋆ ⋆ ⋆

Soit X une variable aléatoire et (Y_n) une suite de variables aléatoires telles que $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$.
On pose alors $X_n = X + Y_n$. Montrer que $X_n \xrightarrow{P} X$. Même question si $Y_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 8 ⋆ ⋆ ⋆

Soit (S_n) une suite de variables aléatoires telles que $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leq np)$.

2 Convergence en loi

Exercice 9 ⋆⋆

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telles que $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de X_n.
2. Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).

Exercice 10 ⋆⋆

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi géoémtrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose alors $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Étudier alors la convergence en loi de (Y_n).

Exercice 11 ⋆⋆⋆

Soit $f : x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit à présent $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. de densité f.
   (a) Déterminer la fonction de répartition des X_i.
   (b) En déduire la fonction de répartition de $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
   (c) Étudier la convergence en loi de $(M_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12 ⋆⋆⋆

Soit $N \geq 2$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On pose alors $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable que l'on précisera.
2. Montrer qu'il s'agit également d'une convergence en probabilités.

Exercice 13 ⋆⋆⋆

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. On note M_n et X_n les variables aléatoires définies par :

$$M_n = \max(U_1, \dots, U_n) \text{ et } X_n = n(1 - M_n).$$

Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 14 - D'après EDHEC 2007 ⋆⋆⋆

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1.
On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Rappeler quelle est la loi suivie par S_n. Donner l'espérance et la variance de S_n.
2. À l'aide du théorème central limite, établir que $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leq n) = \frac{1}{2}$.
3. En déduire un équivalent lorsque n tends vers $+\infty$ de $\int_0^n t^{n-1}e^{-t}dt$.

3 Modélisation

Exercice 15 ⋆⋆

Dans le désert, une Renault 4L crève en moyenne tous les 4 000 km. On considère donc qu'à chaque kilomètre, la probabilité de crever est de $\frac{1}{4000}$.
Un équipage s'incrit au 4L Trophy, rallye de 6 000 km dans le désert. Il aimerait savoir combien de roue de secours emporter pour avoir moins de 10% de chances de manquer de roues de secours.
Deux roues de secours sont-elles suffisantes ? Trois ? On donne : $e^{-3/2} \approx 0,22$.

Exercice 16 ⋆⋆

Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heure. Combien de lignes téléphonique doit faire installer l'entreprise afin que la probabilité que toutes les lignes soient occupées en même temps soit inférieure ou égale à $0,025$?

4 Exercices de concours

Exercice 17 - QSP ESCP 2016 ⋆⋆⋆⋆

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Soit t un réel strictement positif. Montrer que la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance et la calculer.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que $P(X \geq n) \leq e^{-tn}E(e^{tX})$.
3. En déduire que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \leq e^n \left(\frac{\lambda}{n}\right)^n$.

Exercice 18 - QSP HEC 2007 ⋆⋆⋆⋆⋆

Déterminer une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires telles que :

- chacune des variables X_n ne prenne que 2 valeurs ;
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge en probabilités vers la variable nulle ;
- $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = 1$;
- $\lim_{n\to+\infty} V(X_n) = +\infty$;

Exercice 19 - Oral ESCP 2017 ⋆⋆⋆⋆⋆

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux suites de variables aléatoires et soient X et Y des variables aléatoires.
On sppose que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X et que $(Y_n)_n$ converge en probabilité vers Y.

1. Vérifier que $X_nY_n - XY = (X_n - X)Y + (Y_n - Y)X + (X_n - X)(Y_n - Y)$.

Soit $\epsilon > 0$. On pose :

$$\begin{aligned} A_n &= [|X_nY_n - XY| > \epsilon], \\ B_n &= [|X_n - X||Y| > \epsilon/3], \\ C_n &= [|Y_n - Y||X| > \epsilon/3], \\ D_n &= [|X_n - X||Y_n - Y| > \epsilon/3], \end{aligned}$$

2. Montrer que $P(A_n) \leq P(B_n) + P(C_n) + P(D_n)$.
3. Soit $\delta > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $t > A$, $P(|Y| > t) < \frac{\delta}{2}$.
   (b) Montrer que pour tout $t > 0$, $P(B_n) \leq P\left(|X_n - X| > \frac{\epsilon}{3t}\right) + P(|Y| > t)$.
   (c) Soit $t > A$. Montrer qu'il existe un entier N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$, $P\left(|X_n - X| > \frac{\epsilon}{3t}\right) < \frac{\delta}{2}$.
   (d) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0$.

On montrerait de même et on admet ici que $\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 0$.

4. Montrer que :
   $P(D_n) \leq P\left(|X_n - X| > \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\right) + P\left(|Y_n - Y| > \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\right)$.
   En déduire que $\lim_{n\to+\infty} P(D_n) = 0$.
5. Montrer que la suite (X_nY_n) converge en probabilités vers XY.

Exercice 20 - $P \Rightarrow \mathcal{L}$ - Oral HEC ⋆⋆⋆⋆⋆

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et X des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X_n \xrightarrow{P} X$. On note F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de X.
Soit x un point de continuité de F et soit $\delta > 0$ fixé.

1. Montrer qu'on peut choisir ϵ tel que $F(x - \epsilon) > F(x) - \delta$ et $F(x + \epsilon) < F(x) + \delta$.
2. Montrer que :
   $[X_n \leq x] \subset [X \leq x + \epsilon] \cup [|X_n - X| > \epsilon]$.
   Montrer de même que :
   $[X \leq x - \epsilon] \subset [X_n \leq x] \cup [|X_n - X| > \epsilon]$.
3. En déduire que :
   $F_n(x) \leq F(x) + \delta + P(|X_n - X| > \epsilon)$
   et : $F(x) - \delta \leq F_n(x) + \delta + P(|X_n - X| > \epsilon)$.
4. Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.