Correction DM7 - Endomorphismes symétriques

Exercice 1 - ECRICOME ECS 2005

1. On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On a alors bien :
$$\boxed{aI + bJ + cK = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = M(a,b,c).}$$
   Calculons alors :
$$\begin{aligned}
J^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,} \\
K^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},} \\
K^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2K.}
\end{aligned}$$
   On remarque en particulier que $\boxed{K^2 = I + J}$ et que $K^3 - 2K = 0$ donc que $\boxed{X^3 - 2X \text{ est annulateur de } K.}$
   On a $X^3 - 2X = X(X^2-2) = X(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ et donc les valeurs propres possibles pour K sont 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ c'est-à-dire formellement :
$$\boxed{\mathrm{Sp}(K) \subset \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}.}$$

2. K est une matrice symétrique réelle. $\boxed{K \text{ est donc diagonalisable en base orthonormée.}}$
   En conséquence, $\boxed{D \text{ et } P \text{ existent.}}$
   On a :
$$\mathrm{rg}(K - 0 \times I_3) = \mathrm{rg}(K) = 2$$
   donc $0 \in \mathrm{Sp}(K)$ et $\dim E_0(K) = 3 - 2 = 1$.
   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :
$$\begin{aligned}
KX = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& 0 \\ x+z &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& 0 \\ z &=& -x \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_0(K)$. C'est une base car elle est clairement libre (ou par égalité des dimensions).

De même, on vérifie facilement que $\sqrt{2}\in \mathrm{Sp}(K)$ et que :

$$\boxed{E_{\sqrt{2}}(K)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right).}$$

On a aussi $-\sqrt{2}\in \mathrm{Sp}(K)$ et :

$$\boxed{E_{-\sqrt{2}}(K)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right).}$$

Comme K est symétrique, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right)$ qui est constituée de vecteurs propres de sous-espaces propres distincts, est une famille orthogonale et même une base orthogonale de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On peut facilement l'orthonormaliser en prenant des vecteurs unitaires : $\left(\begin{pmatrix}\frac12\\-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac12\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac12\\\frac{1}{\sqrt2}\\\frac12\end{pmatrix}\right)$.

On pose donc :

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}\frac12 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac12\\ -\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac12 & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac12\end{pmatrix}}\quad\text{et}\quad\boxed{D=\begin{pmatrix}-\sqrt2 & 0 & 0\\0&0&0\\0&0&\sqrt2\end{pmatrix}.}$$

On a bien :

$$\boxed{D={}^tPKP.}$$

3. On a :

$$M=aI+bJ+cK.$$

Or $I+J=K^2$ donc $J=K^2-I$. D'où :

$$\boxed{M=aI+b(K^2-I)+cK=(a-b)I+cK+bK^2.}$$

On calcule donc :

$$\begin{aligned}{}^tPMP &= (a-b){}^tPIP+c{}^tPKP+b{}^tPK^2P\\ &= (a-b)\underbrace{{}^tPP}_{=I}+cD+b{}^tPK\underbrace{{}^tPP}_{=I}KP\\ &= \boxed{(a-b)I+cD+bD^2.}\end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$${}^tPMP=\begin{pmatrix}(a-b)-\sqrt2c+2b & 0 & 0\\ 0 & a-b & 0\\ 0&0&(a-b)+\sqrt2c+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b-\sqrt2c&0&0\\0&a-b&0\\0&0&a+b+\sqrt2c\end{pmatrix}.$$

M est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M)=\{a+b-\sqrt2c,a+b,a+b+\sqrt2c\}.}$$

Mais, il se peut qu'il y ait redondance dans les valeurs précédentes. Essayons de dénombrer les valeurs propres de manière systématique :

- **Si** $c = 0$, les seules valeurs diagonales sont $a+b$ et $a-b$. On distingue donc deux sous-cas :
  - **Si** $c = 0$ **et** $b = 0$, alors les trois valeurs propres sont égales à a et donc $\boxed{M \text{ a 1 valeur propre qui est } a.}$
    De plus, $\boxed{E_a(M) = \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$
  - **Si** $c = 0$ **et** $b \neq 0$, alors $a + b - \sqrt{2}c = a + b = a + b + \sqrt{2}c$ qui est différent de $a - b$ et donc $\boxed{M \text{ a 2 valeurs propres distinctes.}}$
    On remarque alors que : $\dim E_{a+b}(M) = 2$ et $\dim E_{a-b}(M) = 1$. Les colonnes de P donnent les vecteurs propres associés. On a :

$$\boxed{E_{a+b}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{E_{a-b}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right)}.$$

- **Si** $c \neq 0$, alors $a + b - \sqrt{2}c \neq a + b + \sqrt{2}c$. En revanche, on peut avoir $a + b - \sqrt{2}c = a - b$ ou $a + b + \sqrt{2}c = a - b$. Résolvons ces deux équations :

$$a + b - \sqrt{2}c = a - b \Leftrightarrow 2b = \sqrt{2}c \Leftrightarrow b = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

et de même :

$$a + b + \sqrt{2}c = a - b \Leftrightarrow 2b = -\sqrt{2}c \Leftrightarrow b = -\frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Ces solutions sont distinctes car $c \neq 0$. On distingue donc deux sous-cas :

  - **Si** $c \neq 0$ **et** $b \in \{-\frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{c}{\sqrt{2}}\}$, $\boxed{M \text{ admet 2 valeurs propres distinctes.}}$
    Si $b = -\frac{c}{\sqrt{2}}$, on a alors :

$$\boxed{E_{a-b}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{E_{a+3b}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)}.$$

    Si $b = \frac{c}{\sqrt{2}}$, on a alors :

$$\boxed{E_{a-b}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{E_{a+3b}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)}.$$

  - **Si** $c \neq 0$ **et** $b \in \{-\frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{c}{\sqrt{2}}\}$, $\boxed{M \text{ admet 3 valeurs propres distinctes.}}$
    On a alors :

$$\boxed{E_{a+b-\sqrt{2}c}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)}, \quad \boxed{E_{a-b}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right)}$$

$$\text{et} \quad \boxed{E_{a+b+\sqrt{2}c}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)}.$$

4. (a) i. Sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\boxed{\|X'\|^2 = {}^tX'X' = {}^t({}^tPX)PX = {}^tXP{}^tPX = {}^tXX = \|X\|^2.}$$

D'après ce qui précède, on a :

$${}^tPMP = D = \begin{pmatrix} a + b - \sqrt{2}c & 0 & 0 \\ 0 & a - b & 0 \\ 0 & 0 & a + b + \sqrt{2}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Puis :

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{{}^tXMX}{\|X\|^2} \\ &= \frac{{}^t(PX')MPX'}{\|X'\|^2} \\ &= \frac{{}^tX'({}^tPMP)X'}{\|X\|^2} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}{x'^2+y'^2+z'^2} \\ &= \boxed{\frac{4x'^2+2y'^2+8z'^2}{x'^2+y'^2+z'^2}.} \end{aligned}$$

ii. On reprend les notations de l'énoncé. On a :

$$f(x,y,z)-2 = \frac{4x'^2+2y'^2+8z'^2}{x'^2+y'^2+z'^2}-2 = \frac{4x'^2+2y'^2+8z'^2-2x'^2-2y'^2-2z'^2}{x'^2+y'^2+z'^2} = \frac{2x'^2+6z'^2}{x'^2+y'^2+z'^2} \geqslant 0.$$

Donc 2 est bien un minorant de f. De plus :

$$\begin{aligned} f(x,y,z)=2 &\Leftrightarrow \frac{2x'^2+6z'^2}{x'^2+y'^2+z'^2}=0 \\ &\Leftrightarrow 2x'^2+6z'^2=0 \\ &\Leftrightarrow x'=z'=0. \end{aligned}$$

Donc le minimum est atteint pour $x'=z'=0$ et donc pour $X' \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Or :

$$\begin{aligned} X' \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ X' = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ {}^tPX = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ X = \lambda P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ X = \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ atteint son minimum 2 pour } X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right).}$

De même, on vérifie que $f(x,y,z)-8 \leqslant 0$ et que $f(x,y,z)=8 \Leftrightarrow X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi $\boxed{f \text{ atteint son maximum 8 pour } X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)}$.

(b) i. Soit B tel que $B^2 = M$. On a alors :

$$BM = BB^2 = B^3 = B^2B = MB.$$

Donc dans ce cas, $\boxed{M \text{ et } B \text{ commutent.}}$
Soit $X \in \mathrm{E}_\lambda(M)$. On a alors :

$$MBX = BMX = B\lambda X = \lambda BX.$$

Donc $\boxed{BX \in \mathrm{E}_\lambda(M).}$
Or M a 3 valeurs propres distinctes. Ses sous-espaces propres sont donc tous de dimension 1.
Ainsi si $X \neq 0$, alors X engendre $\mathrm{E}_\lambda(M)$. On a donc $BX \in \mathrm{Vect}(X)$ c'est-à-dire il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $BX = \mu X$. $\boxed{X \text{ est donc un vecteur propre de } B}$ pour une certaine valeur propre μ.
P est la matrice de passage de la base canonique à une base orthonormée formée de vecteurs propres de M. C'est donc aussi la matrice de passage de la base canonique à une base orthonormée formée de vecteurs propres de B.
Donc $\boxed{{}^tPBP = P^{-1}BP \text{ est diagonale.}}$

ii. Si $\Delta^2 = {}^tPMP$ alors $P\Delta{}^tP$ est solution de $B^2 = M$. En particulier, Δ est nécessairement diagonale d'après ce qui précède.
On peut donc résoudre parmis les matrices diagonales. Notons :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \Delta^2 = {}^tPMP \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1^2 = 4 \\ \lambda_2^2 = 2 \\ \lambda_3^2 = 8 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \lambda_1 = \pm 2 \\ \lambda_2 = \pm\sqrt{2} \\ \lambda_3 = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}} \end{aligned}$$

Les solutions de $\Delta^2 = {}^tPMP$ sont donc les 8 matrices diagonales correspondant à $\lambda_1 = \pm 2$, $\lambda_2 = \pm\sqrt{2}$ et $\lambda_3 = \pm 2\sqrt{2}$.
Désormais, on a :

$$\begin{aligned} B^2 = M \quad & \Leftrightarrow \quad ({}^tPBP)^2 = {}^tPMP \\ & \Leftrightarrow \quad {}^tPBP = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \boxed{B = P \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2\sqrt{2} \end{pmatrix} {}^tP} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'équation } B^2 = M \text{ admet donc 8 solutions.}}$