Correction DM8 - Calcul différentiel d'ordre 2

Exercice 1 - EDHEC ECS 2018

1. (a) J_n est une matrice non nulle dont toutes les colonnes sont proportionnelles. On a donc $\boxed{\text{rg}(J_n) = 1.}$
Comme $n \geqslant 2$, cela implique que J_n n'est pas inversible et donc $\boxed{0 \in \text{Sp}(J_n).}$ On a de plus :
$$\boxed{\dim E_0(J_n) = n - \text{rg}(J_n) = n - 1.}$$
(b) On a :
$$J_n V_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = nV_n.$$
Comme $V_n \neq 0$, on a bien $\boxed{V_n \text{ est un vecteur propre de } J_n \text{ pour la valeur propre } n.}$
(c) Avec la question précédente, on a donc : $\dim E_n(J_n) \geqslant 1$. Ainsi :
$$\dim E_0(J_n) + \dim E_n(J_n) \geqslant n.$$
Or la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut pas dépasser n, donc ce sont les seuls et $\dim E_n(J_n) = 1$.
Ainsi, on a :
$$\boxed{\text{Sp}(J_n) = \{0, n\}.}$$

2. La fonction $(x_1, \dots, x_n) \mapsto -\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ est polynomiale donc $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^2$. Par composition, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$ sur $\mathbb{R}^n$.
De même, la fonction $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k$ est polynomiale donc $\mathcal{C}^2$. Par produit,
$\boxed{f_n \text{ est donc également } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^n.}$

3. (a) Comme f_n est $\mathcal{C}^2$, f_n est également $\mathcal{C}^1$ et donc admet des dérivées partielles.
Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On a :
$$\begin{aligned} \partial_i(f_n)(x) &= 1 \times \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)(-2x_i)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \\ &= \boxed{\left(1 - 2x_i \sum_{k=1}^{n} x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).} \end{aligned}$$
(b) Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :
$$\begin{aligned} x \text{ est un point critique de } f_n &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \partial_i(f_n)(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \left(1 - 2x_i \sum_{k=1}^{n} x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ 1 - 2x_i \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ 2x_i \sum_{k=1}^{n} x_k = 1. \end{aligned}$$

Si, on somme les équations, on obtient :

$$2\sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^n x_k = n$$

et donc : $\sum_{k=1}^n x_k = \pm\sqrt{\frac{n}{2}}$. On peut donc écrire :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ 2x_i\sum_{k=1}^n x_k = 1 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ 2x_i\sqrt{\frac{n}{2}} = 1 \text{ ou } \forall i \in [\![1,n]\!],\ 2x_i\left(-\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = 1.$$

L'implication ($\Rightarrow$) vient d'être vérifiée. La seconde ($\Leftarrow$) est une simple vérification.
Après simplification, on obtient donc :

$$x \text{ est un point critique de } f_n \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i = \frac{1}{\sqrt{2n}} \text{ ou } \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i = -\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

C'est-à-dire $\boxed{\text{les points critiques de } f_n \text{ sont bien } a \text{ et } b = -a.}$

4. (a) f_n est $\mathcal{C}^2$ et donc admet des dérivées d'ordre 2.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}
\partial^2_{i,i} f_n(x) &= -2\left(\sum_{k=1}^n x_k + x_i \times 1\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) + \left(1 - 2x_i\sum_{k=1}^n x_k\right)(-2x_i)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \\
&= \boxed{-2\left(2x_i + (1-2x_i^2)\sum_{k=1}^n x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right).}
\end{aligned}$$

Pour $j \in [\![1,n]\!]$, avec $j \neq i$, on a également :

$$\begin{aligned}
\partial^2_{j,i} f_n(x) &= (-2x_i \times 1)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) + \left(1 - 2x_i\sum_{k=1}^n x_k\right)(-2x_j)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \\
&= \boxed{-2\left(x_i + x_j - 2x_jx_i\sum_{k=1}^n x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right).}
\end{aligned}$$

(b) Pour $x = a$, on a :

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sqrt{\frac{n}{2}}$$

et :

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = n \times \left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

où on a utilisé $x_k = \frac{1}{\sqrt{2n}}$.
On a donc :

$$\begin{aligned}
\partial^2_{i,i} f_n(a) &= -2\left(2 \times \frac{1}{\sqrt{2n}} + \left(1 - 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2\right)\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{-2}{\sqrt{2ne}}\left(2 + n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{-2}{\sqrt{2ne}}(n+1).
\end{aligned}$$

Et de même :

$$\begin{aligned}
\partial^2_{j,i} f_n(a) &= -2\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} - 2 \times \frac{1}{\sqrt{2n}} \times \frac{1}{\sqrt{2n}} \times \sqrt{\frac{n}{2}}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{-2}{\sqrt{2ne}}\left(1 + 1 - 2 \times \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{-2}{\sqrt{2ne}}.
\end{aligned}$$

On reconnaît les coefficients de $\frac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)$ et donc :

$$\boxed{H_n(a) = \nabla^2 f_n(a) = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n).}$$

(c) J_n est symétrique donc diagonalisable. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de J_n. On considérera en particulier que :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], J_n X_i = 0 \times e_i \quad \text{et} \quad J_n X_n = nX_n.$$

Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$H_n(a)X_i = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)X_i = \frac{-2}{\sqrt{2ne}} nX_i.$$

Et on a également :

$$H_n(a)X_n = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)X_n = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}(nX_n + nX_n) = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}(2n)X_n.$$

Donc $(X_1, \dots, X_n)$ sont des vecteurs propres de $H_n(a)$ et comme c'est une base, on a toutes les valeurs propres.

D'où :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(H_n(a)) = \left\{-\sqrt{\frac{2n}{\mathrm{e}}}, -2\sqrt{\frac{2n}{\mathrm{e}}}\right\}.}$$

(d) On a donc $\mathrm{Sp}(H_n(a)) \subset \mathbb{R}_-^\star$ ainsi $\boxed{\text{le point critique en } a \text{ est un maximum local.}}$

(e) Il faut remarquer que $\partial^2_{i,j} f_n(-x) = -\partial^2_{i,j} f_n(x)$. Ainsi, on a $\mathrm{Sp}(H_n(-a)) \subset \mathbb{R}_+^\star$ et $\boxed{\text{le point critique en } -a \text{ est un minimum local.}}$

5. (a) La fonction h est déribable sur $\mathbb{R}_+$ et pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$h'(t) = \mathrm{e}^{-t^2} + t(-2t)\mathrm{e}^{-t^2} = (1 - 2t^2)\mathrm{e}^{-t^2}.$$

On a donc le signe de h qui est donné par le signe de $(1 - 2t^2)$. On a pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$h'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - 2t^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow t \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

De plus, on a :

$$h(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} -2t^2\mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \text{ par croissance comparée.}$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

t	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	0	$\nearrow$	$h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$	$\searrow$	0

et donc h atteint son maximum $\frac{1}{\sqrt{2e}}$ en $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $(x_1, \dots, x_n)$ et $(1, \dots, 1)$. On obtient :

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^n x_k \times 1\right)^2 \leqslant \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n 1^2\right)}_{=n} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right).}$$

(c) Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a alors :

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \\
&= \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \\
&\leqslant \sqrt{n\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \\
& \text{ Inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leqslant \sqrt{n}h\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\right) \\
&\leqslant \sqrt{n} \times \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\underbrace{-\sqrt{\frac{n}{2\mathrm{e}}}}_{=f_n(b)} \leqslant f_n(x) \leqslant \underbrace{\sqrt{\frac{n}{2\mathrm{e}}}}_{=f_n(a)}.$$

Donc $\boxed{f_n \text{ atteint bien des extrema globaux en } a \text{ et } b.}$

6. **Question d'informatique.**

(a)

```python
import numpy as np

def Hn(n):
    return -2/np.sqrt(2*n*np.exp(1))*(n*np.eye(n) + np.ones((n,n)))
```

(b) La nappe semble acceptable : elle possède deux extrema à des positions qui semblent être $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $b = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Le minimum semble bien en b et le maximum semble bien en a. Il semble que la nappe rejoigne rapidement 0 comme le terme en $\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$ l'implique.