TP9a - Représentation de lois

Dans tout le TP, on importe les modules suivants :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import scipy.special as sp
import matplotlib.pyplot as plt
```

1 Représentations graphiques d'une loi

Commençons ce TP en nous construisons quelques outils. Le but est de pouvoir afficher une représentation graphique d'une loi que l'on aurait simulée.

Exercice 1 - Cas discret ⋆⋆

Pour commencer, nous allons considérer $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. On peut prendre dans cette exercice $n = 18$ et $p = 0,55$. Le but est de simuler cette variable et d'en tirer un graphique qui représente la loi de X.

1. Nous allons utiliser la fonction `plt.hist` pour afficher la loi de X estimée sous forme d'histogramme. `plt.hist` prend deux paramètres : les données et une liste de délimiteurs pour notre histogramme. Elle prend également un argument optionnel `density=True` qui permet d'afficher une fréquence plutôt qu'un compte brut.

   Nous allons écrire une fonction `def loi_discrete(S):` qui prend une série de données entières et produit l'histogramme. Compléter la fonction :

```
def loi_discrete(S):
  m = ...
  M = ...
  bins = np.arange(m, M+1)
  plt.hist(S,bins,density=True)
  plt.show()
```

2. Essayez ensuite la fonction sur une série de tirages :

```
N = 50
X = rd.binomial(18,0.55,N)
loi_discrete(X)
```

Exercice 2 - Cas à densité ⋆⋆

Dans le cas d'une variable Y à densité, il n'est pas possible de représenter $P(Y = k)$ pour déterminer la loi de Y. On peut tout de même utiliser un histogramme. Faisons l'essai sur une variable $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$:

1. Créer une série de tirages :

```
N = 50
Y = rd.normal(0,1,N)
```

2. On va encore utiliser `plt.hist`. Mais cette fois, on va simplement passer un nombre en deuxième argument qui correspond aux nombres de barres pour l'histogramme.

```
# On donne un nombre a plt.hist
# il s'arrange automatiquement
b = 20
plt.hist(Y,b,density=True)
plt.show()
```

Changer les paramètres `N` et `b` pour observer comment l'histogramme évolue.

2 Convergence en loi

Utilisons ce que l'on vient de faire pour illustrer la convergence en probabilités.

Exercice 3 - Simuler une loi normale ⋆⋆

Soit $(U_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$X_n = \sqrt{\frac{12}{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} U_k - \frac{n}{2}\right).$$

1. Montrer que (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
2. Pour $n = 12$, la définition de X_{12} se simplifie. Compléter le code suivant afin de créer un tableau contenant 10 000 simulations de X_{12} :

```
A = -6 * np.ones(10000)
for i in range(10000):
  for j in range(...):
    A[i] = A[i] + ...
```

3. Tracer alors l'histogramme représentant la loi ainsi simulée.
4. On va superposer à l'histogramme, la courbe de la densité continue de la loi normale centrée réduite. Pour cela, nous allons utiliser le code suivant (à compélter) :

```
X = np.linspace(-6,6,...)
B = 1/np.sqrt(...)*np.exp(...)
plt.plot(X,B)
```

Observer et commenter

5. Comment exploiter ce qui précède pour simuler une loi normale $\mathcal{N}(-3,10)$?