TD14 - Recherche d'extrema

1 Extrema globaux

Exercice 1 ⋆⋆⋆

Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-1 \leq y \leq 1-x^2\}$ et soit $\mathcal{D}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-1 < y < 1-x^2\}$. On admet que $\mathcal{D}$ est fermée et $\mathcal{D}_0$ est ouvert et que tous les deux sont bornés.
Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2$.

1. Justifier que f possède un maximum M et un minimum m.
2. Déterminer les points critiques de f sur $\mathcal{D}_0$.
3. Étudier les fonctions $x \mapsto f(x, x^2-1)$ et $x \mapsto f(x, 1-x^2)$ et en déduire les valeurs de m et M.

Exercice 2 ⋆⋆⋆

Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ et soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1. Justifier que f possède un maximum M et un minimum m.
2. Montrer que sur $\mathring{B}(0,1)$, f n'admet pas de point critique. Que peut-on en déduire à propos de m et M ?
3. En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$ déterminer les valeurs de m et M.

2 Extrema sous contraintes

Exercice 3 ⋆⋆

Déterminer les extrema locaux de $f(x,y) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (y+2)^2$ sous la contrainte $x+y+z = 3$. Ces extrema sont-ils globaux ?

Exercice 4 ⋆⋆

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z,t) = x^2+y^2+z^2+t^2$ et soit $\mathcal{C}$ la contrainte définie par les équations : :

$$\begin{cases} x+y &= 2 \\ z+t &= 0 \end{cases}.$$

1. Déterminer l'ensemble des points critiques de f sous la contrainite $\mathcal{C}$.
2. Déterminer la nature de ces points critiques.

Exercice 5 ⋆⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ et soit $\mathcal{C}$ la contrainte définie par $x+y+z = 2$. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des solutions de $x+y+z = 0$.

1. Montrer que f admet un unique point critique $a_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sous la contrainte $\mathcal{C}$.
2. Déterminer une base (e_1, e_2) de $\mathcal{H}$.
3. Montrer que $\nabla^2 f(x,y,z)$ ne dépend pas de $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On note q la forme quadratique associée à cette hessienne.
4. La forme quadratique q est-elle de signe constant sur $\mathbb{R}^3$?
5. Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, calculer $q(\lambda e_1 + \mu e_2)$ et en déduire que pour tout $h \in \mathcal{H}$, $q(h) \leq 0$.
6. Soit $a \in \mathcal{C}$, soit $h = a - a_0$ et soit $g : t \mapsto f(a_0 + th)$.
   (a) Rappeler pourquoi g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $g'(t)$ et $g''(t)$.
   (b) À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que g admet un maximum en 0.
   (c) En déduire que f admet un maximum global en a_0 sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Exercice 6 ⋆⋆⋆

On souhaite minimiser la surface d'une boîte rectangulaire dont le volume doit être égal à 8 dm^3. Autrement dit, cela revient à déterminer le minimum de la fonction $f(x,y,z) = 2(xy+yz+xz)$ sur $(\mathbb{R}_+^\star)^3$ sous la contrainite $xyz = 8$.

1. Montrer que cela revient à minimiser la fonction $g(x', y', z') = \ln \circ f(\mathrm{e}^{x'}, \mathrm{e}^{y'}, \mathrm{e}^{z'})$ définie sur $\mathbb{R}^3$ sous la contrainte $\mathcal{C} \ : \ x' + y' + z' = \ln(8)$.
2. Déterminer les points critiques de g sous la contrainte $\mathcal{C}$.
3. Montrer que pour tout $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^\star)^3$:

$$\frac{1}{3}(\ln(a) + \ln(b) + \ln(c)) \leq \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right).$$

4. Conclure.

3 Exercices de concours

Exercice 7 - ECRICOME 2008 ⋆⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[^3$ par $f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{4x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{9x_3}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. On note $\nabla^2 f(A)$ la matrice hessienne de f au point $A = (a_1, a_2, a_3)$. Justifier que pour tout $A \in]0,+\infty[^3$ et pour toute matrice colonne à trois lignes H non nulle, on a :
$$^tH\nabla^2 f(A)H > 0.$$
3. Montrer que f admet un unique point critique a sous la contrainte $\mathcal{C} \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 110$.
4. On cherche désormais à prouver que a est un extremum global de f sous la contrainte $\mathcal{C}$. Pour cela, on considère $x \in \mathcal{C}$ et on note $h = x - a$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = f(a + th)$.
   (a) Exprimer $g(0)$ puis $g(1)$ en fonction de f.
   (b) Montrer que $g'(0) = 0$.
   (c) Prouver que pour tout $t \in [0,1]$, $g''(t) \geq 0$ puis que $g'(t) \geq 0$.
   (d) En déduire que $f(x) \geq f(a)$ et conclure.

Exercice 8 - EDHEC 2001 ⋆⋆⋆

Soit $n \geq 2$. Soit $f :]0,1[^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^n (1-x_i)^n$.
Déterminer les extrema locaux de f sous la contrainte $\mathcal{C} \ : \ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$.

Exercice 9 - EDHEC 2020 ⋆⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le seul point critique A de f.
3. (a) Calculer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de f en A.
   (b) Déterminer la hessienne de f au point A et vérifier qu'elle est diagonale. Montrer que f présente un minimum local en A. Préciser la valeur de ce minimim.
4. (a) Montrer que, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$:
   $f(x,y,z) \geq x\mathrm{e}^x$.
   (b) Que peut-on en déduire pour le minimum de f trouvé à la question 3b ?
5. On souhaite étudier les extrema de f sous la contrainte linéaire :
$$\mathcal{C} \ : \ \begin{cases} x & = & 1 \\ y+z & = & 0 \end{cases}.$$
Montrer que, sous la contrainte $\mathcal{C}$, f présente un minimum global au point $(1,0,0)$. Quelle est sa valeur ?