DM9 - Convergence de variables aléatoires

Pour le jeudi 15/02/2024

Consignes :
Essayer de traiter le sujet : il est difficile mais il est bon de s'y confronter. Dans tous les cas, les questions 17, 19a, 19b et 20 doivent être abordées, quitte à admettre les résultats des questions 9b et 18.
Si, après avoir véritablement essayé, le sujet vous paraît trop difficile, en plus des questions sus-mentionnées, rendez l'exercice 11 du TD13.

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques **Python** *sont importées comme suit :*

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Problème 1 - EML ECS 2012

Partie I - Formule de Stirling.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. (a) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_n > 0$.
3. (a) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
   (b) En déduire, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1 W_0$.
4. (a) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant \frac{n+1}{n+2} W_n$.
   (b) En déduire : $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$, puis $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
5. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$: $A_n = \dfrac{1}{n!} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $a_n = -1 - \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

6. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} a_n$ converge.
7. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.
8. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et que sa limite ℓ est strictement positive.
9. (a) Justifier : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}$.
   (b) En utilisant l'expression de de W_{2n} à l'aide de factorielles, en déduire la valeur de ℓ et l'équivalent suivant :
   $$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Partie II - Étude de variables aléatoires.

Soit un réel a strictement positif et la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par :

$$\begin{cases} f_a(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ f_a(x) = \frac{x}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

10. Montrer que f_a est une densité.

On considère une variable aléatoire X admettant f_a comme densité.

11. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
12. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.
13. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$.
14. (a) On considère une variable aléatoire V suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0;1]$. Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(V)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.
    (b) En déduire une fonction `Python` utilisant la fonction `rd.random`, simulant la variable aléatoire X, le réel a strictement positif étant passé en paramètre.

Pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$, on considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue, dans U_n, des tirages d'une boule avec remise. On suppose que tous les tirages dans U_n sont équiprobables. On s'arrête dès que l'on obtient une boule déjà obtenue.
On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

15. Justifier : $P(T_n > n+1) = 0$.
16. Déterminer, pour tout entier k tel que $k \leqslant n$: $P(T_n > k)$.

On considère la variable aléatoire $Y_n = \frac{T_n}{\sqrt{n}}$. On se propose d'étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 2}$.
Soit $y \in [0, +\infty[$. On note k_n l'entier naturel égal à la partie entière de $y\sqrt{n}$.
On a donc : $k_n \leqslant y\sqrt{n} < 1 + k_n$.

17. Justifier : $P(Y_n > y) = P(T_n > k_n)$.
18. En utilisant la question 9b, montrer : $P(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-k_n}\left(1 - \dfrac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}$.
19. (a) Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $t \mapsto -t + (t-1)\ln(1-t)$ en 0.
    (b) En déduire : $\lim_{n\to+\infty}\left(-k_n + (k_n - n)\ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)\right) = -\frac{y^2}{2}$.
20. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.