Révisions - Algèbre linéaire et bilinéaire

Problème 1 - EML ECS 2015 - Problème 1 ⋆⋆

Dans tout le problème, on confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_k[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré au plus k.
On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \ ; \ P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W = X(X-4)$

Partie I - Étude d'endomorphismes.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$.

   Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\phi(Q) = W.Q$.
2. Montrer que l'application $\phi \ : \ Q \longmapsto W.Q$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans E.

3. En déduire une base et la dimension de E.

   Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on considère le polynôme $\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X)$.
   Ainsi si par exemple $Q = X^2 - 3X + 5$, on a : $\Delta(Q) = ((X+1)^2 - 3(X+1) + 5) - (X^2 - 3X + 5)$.
4. (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$ le degré du polynôme $\Delta(Q)$ en fonction de celui de Q.
   (c) Déterminer le noyau et l'image de Δ.
   (d) Établir : $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.

   On définit l'endomorphisme f de E suivant : $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$, où ϕ^{-1} est l'application réciproque de ϕ.
5. (a) Montrer que $f \circ f \circ f = 0$.
   (b) Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.
   (c) Démontrer que f admet une valeur propre et une seule et la déterminer.
   (d) Est-ce que f est diagonalisable ?

Partie II - Étude d'un produit scalaire

On considère l'application $\langle \, . \, , \, . \, \rangle$ de $\mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \, (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X] \ , \qquad \langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^{4} P_1(k) \, P_2(k)$$

.

6. Montrer que $\langle \, . \, , \, . \, \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.

   On munit dorénavant $\mathbb{R}_4[X]$ de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\| \, . \, \|$.
   On définit les trois polynômes suivants :
   $L_1 = (X-2)(X-3)$, $L_2 = (X-1)(X-3)$ et $L_3 = (X-1)(X-2)$.
7. Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

8. (a) Exprimer pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) en fonction de $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$.
   (b) Exprimer $\Delta(L_1)$, $\Delta(L_2)$ et $\Delta(L_3)$ dans cette même base, et en déduire que la matrice de l'endomorphisme Δ dans la base (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$.

   On note pour tout i dans $\{1,2,3\}$, $M_i = W \, L_i$.
9. (a) Montrer que pour tout i dans $\{1,2,3\}$, $M_i(i)$ est non nul.
   On note alors pour tout i dans $\{1,2,3\}$, $N_i = \frac{1}{M_i(i)} \, M_i$.

(b) Montrer que (N_1, N_2, N_3) est une base orthonormée du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}_4[X]$.

10. Déterminer la matrice de l'application linéaire ϕ dans les bases (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ et (N_1, N_2, N_3) de E.

11. Déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base (N_1, N_2, N_3) de E.

12. On note pour tout P de $\mathbb{R}_4[X]$, $u(P) = \sum_{i=1}^{3} P(i)\, N_i$.
    (a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
    (b) Montrer que : $\forall\, P \in\ R_4[X]\ ,\ \forall\, j \in\ \{1, 2, 3\}\ ,\ \langle P - u(P)\, ,\, N_j\rangle = 0$.
    (c) En déduire que u est la projection orthogonale sur E.
    (d) Déterminer le projeté orthogonal de $Q = X^2\,(X-2)\,(X-3)$ sur E.

Exercice 2 - EDHEC ECS 2019 - Exercice 3 ⋆⋆⋆

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n)$ une base orthonormale de E. Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

Partie I - définition de l'adjoint $u^\star$ d'un endomorphisme u de E.
Dans toute cette partie, u désigné un endomorphisme de E.
On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté $u^\star$, qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^\star(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$

1. (a) Montrer que si $u^\star$ existe, alors on a, pour tout y de E :

$$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i$$

   (b) En déduire que si $u^\star$ existe, alors $u^\star$ est unique.
2. (a) Vérifier que l'application $u^\star$ définie par l'égalité établie à la question 1.(a) est effectivement un endomorphisme de E.
   (b) Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E, appelé *adjoint* de u, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$

Partie II - Étude des endomorphismes normaux.
On dit que u est un endomorphisme normal quand on a l'égalité :

$$u \circ u^\star = u^\star \circ u$$

Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

3. (a) Montrer que : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^\star(x)\|$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^\star)$.
4. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par $u^\star$.
5. On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous espace propre associé.
   (a) Montrer que E_λ est stable par $u^\star$.
   (b) Établir que $(u^\star)^\star = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

On revient au cas général u quelconque

6. Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :
   i. u est normal

ii. $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle u^\star(x), u^\star(y)\rangle$.

iii. $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^\star(x)\|$.

On pourra, par exemple, successivement prouver les implications :
$i \Rightarrow ii, ii \Rightarrow iii, iii \Rightarrow ii$ et $ii \Rightarrow i$.

Problème 3 - EML ECS 2002 - Problème 2 ⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté $\langle , \rangle$.
L'objectif du problème est d'étudier les endomorphismes u de E tels que

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$$

Les endomorphismes vérifiant cette propriété sont appelés endomorphismes antisymétriques.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette partie, E est l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que $(1, X, X^2)$ est une base de E.
On considère l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout couple (P,Q) d'éléments de E par :

$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1)$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire.
   Dans cette première partie, on considère que E est muni de ce produit scalaire.
2. On considère l'endomorphisme u de E défini pour tout P de E par :
   $$u(P) = 2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))\, X.$$
   (a) Vérifier que $\forall P \in E,\ 2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0$.
   (b) En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique de l'espace vectoriel euclidien E.
3. Soit $P_1 = \frac{1}{2}(X^2 + X)$ et $P_2 = \frac{1}{2}u(P_1)$.
   (a) Vérifier que P_1 est un vecteur propre de u^2 et que la famille (P_1, P_2) est orthonormale.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
   (c) Déterminer une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et un nombre réel a tels que la matrice associée à u relativement à cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie II - Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme de E.

1. Pour tout couple (x,y) de E^2, développer $\langle u(x+y), x+y\rangle$.
   En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :
   $$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$$
2. On suppose dans cette question que la dimension n de E est non nulle.
   Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, et $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$.
   (a) Montrer que $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2$, $m_{i,j} = \langle e_i, u(e_j)\rangle$.
   (b) En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice M associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tM = -M$.

Partie III - Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme antisymétrique non nul de E.
On pourra utiliser la caractérisation obtenue dans la question **II.1.**

1. Soit λ un nombre réel. Montrer que si λ est valeur propre de u, alors $\lambda = 0$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E.
   En déduire que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$.
3. Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique de E et que toute valeur propre de u^2 est négative ou nulle.
4. (a) Montrer que u^2 admet au moins une valeur propre non nulle.
   Soit x un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre non nulle et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, u(x))$.
   (b) Montrer que F est un plan vectoriel stable par u.
   (c) Montrer que $F^\perp$, le supplémentaire orthogonal de F, est stable par u.
   (d) On munit $F^\perp$ du produit scalaire $\langle , \rangle_1$ défini pour tout couple (x, y) d'éléments de $F^\perp$ par

$$\langle x, y\rangle_1 = \langle x, y\rangle$$

   On définit l'endomorphisme u_1 de $F^\perp$ par, $\forall x \in F^\perp,\ u_1(x) = u(x)$.
   Montrer que u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ et que $\mathrm{Im}(u) = F \oplus \mathrm{Im}(u_1)$.
5. Montrer que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair. On pourra faire une récurrence sur la dimension de E.

Partie IV - Application

Dans cette partie, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E.
Soit u l'endomorphisme de E associé, relativement à la base $\mathcal{B}$, à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme antisymétrique de E.
   Vérifier que le vecteur $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est vecteur propre de u^2.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(f_1, u(f_1))$. Déterminer une base orthonormale de F et une base orthonormale de $F^\perp$.
3. En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ de E et deux nombres réels a et b tels que la matrice associée à u relativement à $\mathcal{B}_0$ soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$.