CORRECTION - ALGÈBRE LINÉAIRE ET BILINÉAIRE

Problème 1 - EML ECS 2015 - Problème 1

Partie I - Étude d'endomorphismes.

1. Il est clair que le polynôme nul appartient à E.
   Soit $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

   $$(P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad (P + \lambda Q)(4) = P(4) + \lambda Q(4) = 0$$

   Ainsi $P + \lambda Q \in E$.
   E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
   On aurait aussi pu dire que E est l'intersection des noyaux des deux formes linéaires $P \mapsto P(0)$ et $P \mapsto P(4)$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors $\deg(P) \leqslant 2$, ainsi $\deg(\phi(P)) = \deg(WP) = \deg(W) + \deg(P) \leqslant 2 + 2 \leqslant 4$
   De plus on a $\phi(P)(0) = W(0)P(0) = 0P(0) = 0$ et $\phi(P)(4) = W(4)P(4) = 0P(4) = 0$. On a donc bien $\phi(P) \in E$.
   Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

   $$\phi(P_1 + \lambda P_2) = W(P_1 + \lambda P_2) = WP_1 + \lambda WP_2 = \phi(P_1) + \lambda\phi(P_2)$$

   Ainsi ϕ est bien une application linéaire.
   Soit $Q \in E$, par définition de E 0 et 4 sont des racines de Q, ainsi q peut se factoriser par $X(X-4)$, il existe ainsi R tel que $Q = X(X-4)R = WR = \phi(R)$.
   ϕ est ainsi surjective dans E.
   Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\phi(P) = 0$ on a donc $WP = 0$. On en déduit que

   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}, \qquad P(x) = 0$$

   P admet alors une infinité de racines et est donc le polynôme nul.
   On a ainsi $\ker(\phi) = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$, on en déduit que ϕ est injective.
   Finalement ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans E à la fois injective et surjective, c'est donc un isomorphisme.
3. On sait que $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel de dimension 3 et que $(1, X, X^2)$ est une base de E.
   Comme ϕ est un isomorphisme entre $\mathbb{R}_2[X]$ et E alors E est un espace vectoriel de dimension 3 et la famille $(\phi(1), \phi(X), \phi(X^2))$ est une base de E, i.e. $(X(X-4), X^2(X-4), X^3(X-4))$ est une base de E.
4. (a) Soit $p \in \mathbb{R}_2(X]$, alors $\Delta(P)$ est encore un polynôme, de plus

   $$\deg(\Delta(P)) \leqslant \max(\deg(P), \deg(P(X+1)) \leqslant \max(\deg(P), \deg(P)) \leqslant \deg(P) \leqslant 2$$

   Δ prend donc ses valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.
   Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors

   $$\begin{aligned}\Delta(P_1 + \lambda P_2) &= (P_1 + \lambda P_2)(X+1) - (P_1 + \lambda P_2)(X)\\ &= P_1(X+1) + \lambda P_2)(X+1) - P_1(X) - \lambda P_2)(X)\\ &= \Delta(P_1) + \lambda\Delta(P_2)\end{aligned}$$

   Ainsi Δ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Remarque : $\Delta(P) = \frac{P(X+1)-P(X)}{X+1-X}$ *est appelé la dérivée discrète de P, la plupart des propriétés de Δ sont analogues à celle de l'application $P \mapsto P'$.*

   (b) Si Q est constant (i.e. de degré 0) alors $\Delta(Q) = 0$ et donc $\deg(\Delta(Q)) = -\infty$.
   On va ensuite procéder par récurrence forte sur $d = \deg(Q)$ pour montrer que $\deg(\Delta(Q)) = \deg(Q) - 1$.
   Remarque : *On peut simplement écrire $Q = aX^2 + bX + c$, calculer $\Delta(Q)$ et étudier le degré du résultat mais on va ici proposer une méthode qui fonctionne sur $\mathbb{R}_n[X]$ avec n quelconque.*

- **Initialisation :**
  Soit Q un polynôme de degré 1, on peut donc écrire $Q = aX$ avec $a \neq 0$, alors $\Delta(Q) = a(X+1) - aX = a$ et donc $\deg(\Delta(Q)) = \deg(Q) - 1$
- **Hérédité :** Soit $d \in \mathbb{N}$, on suppose que, si $\deg(Q) \leqslant d-1$ alors $\deg(\Delta(Q) = \deg(Q) - 1$.
  Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ un polynôme de degré $d \geqslant 1$, on peut alors écrire $Q = a_d X^d + \tilde{Q}$ où $\deg(\tilde{Q}) \leqslant d-1$ et $a_d \neq 0$. On a alors
  $$\Delta(Q) = \Delta(a_d X^d + \tilde{Q}) = a_d \Delta(X^d) + \Delta(\tilde{(}Q))$$
  D'après l'hypothèse de récurrence $\deg(\Delta(\tilde{Q})) = \deg(\tilde{Q}) - 1 \leqslant d-2$.
  On a
  $$\Delta(X^d) = (X+1)^d - X^d = \left(\sum_{k=0}^{d} \binom{k}{d} X^k\right) - X^d = \sum_{k=0}^{d-1} \binom{k}{d} X^k$$
  Ainsi $\deg(\Delta(X^d)) = d-1$ et donc, $\deg(a_d\Delta(X^d)) = d-1$.
  Alors, comme $\deg(a_d\Delta(X^d)) > \deg(\Delta(\tilde{Q}))$ on a
  $$\deg(\Delta(Q)) = \deg(a_d X^d + \tilde{Q}) = \deg(a_d X^d) = d-1$$
  Ce qui prouve la propriété au rang $d+1$ et achève la récurrence.

Ainsi, si $\deg(Q) = 0$ alors $\deg(Q) = -\infty$ et si $\deg(Q) \geqslant 1$ alors $\deg(\Delta(Q)) = \deg(Q) - 1$.

(c) On a $Q \in \ker(\Delta)$ si et seulement si $\Delta(Q) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\deg(\Delta(Q)) = -\infty$.
D'après la question précédente on a donc $\ker(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$ (l'ensemble des polynômes constants).
Là encore d'après la question précédente on a $\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_1[X]$. De plus
$$\dim(\mathrm{Im}(\Delta) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(\Delta)) = 3 - 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}_1[X])$$
Ainsi $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_1[X]$.

(d) On a montré précédemment que $\deg(\Delta(P)) \leqslant \deg(P) - 1$. Ainsi on a
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \qquad \deg(\Delta \circ \Delta \circ \Delta(P)) \leqslant \deg(P) - 3 \leqslant -1$$
D'où $\deg(\Delta \circ \Delta \circ \Delta(P)) = -\infty$, i.e. $\Delta \circ \Delta \circ \Delta(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$
On a donc bien $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.

5. (a) On a
$$\begin{aligned} f \circ f \circ f &= \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1} \\ &= \phi \circ \Delta \circ \mathrm{Id}_E \circ \Delta \circ \mathrm{Id}_E \circ \Delta \circ \phi^{-1} \\ &= \phi \circ \Delta \circ \Delta \circ \Delta \circ \phi^{-1} \\ &= \phi \circ 0 \circ \phi^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$, on a donc $\phi(\Delta(\phi^{-1}(P))) = 0$.
Or ϕ est injective donc $\Delta(\phi^{-1}(P)) = 0$ i.e. $\phi^{-1}(P) \in \mathrm{Ker}(\Delta)$.
Il existe ainsi $a \in \mathbb{R}$ tel que $\phi^{-1}(P) = a$, d'où $P = \phi(a) = aW$.
D'où $\ker(f) \subset \{aW,\ a \in \mathbb{R}\}$.
Réciproquement, pour $a \in \mathbb{R}$ on a $f(aW) = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}(\phi(a)) = \phi(\Delta(a)) = \phi(0) = 0$.
Ainsi $\ker(f) = \{aW,\ a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(W)$.
W est donc une base du noyau de f.
Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Im}(\Delta)$, il existe alors $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P = \Delta(Q)$, ainsi
$$WP = \phi(P) = \phi \circ \Delta(Q) = (\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1})(\phi(Q)) = f(\phi(Q))$$
On en déduit que $WP \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi $\{WP\ ,\ P \in \mathbb{R}_1[X]\} \subset \mathrm{Im}(f)$.
D'après le théorème du rang on a
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$$

De plus

$$\dim\left(\{WP\ ,\ P\in\mathbb{R}_1[X]\}\right)=\dim(\phi(\mathbb{R}_1[X])\underbrace{=}_{\substack{\text{car } \phi \text{ est}\\ \text{un isomorphisme}}}\dim(\mathbb{R}_1[X])$$

Ainsi, on a $\mathrm{Im}(f)=\{WP\ ,\ P\in\mathbb{R}_1[X]\}=\mathrm{Vect}(W,XW)$, (W,XW) est alors une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(c) D'après la question 5.(a) f est annulé par la polynôme X^3. Les valeurs propres de f sont donc incluses dans les racines de X^3, ainsi $\mathrm{Sp}(f)\subset\{0\}$.

De plus f n'est pas bijective (sinon $f^3=0$ le serait aussi), ainsi 0 est une valeur propre de f. Ainsi f admet 0 comme unique valeur propre

(d) Si f était diagonalisable alors f serait semblable à $0\mathrm{Id}$, on aurait donc $f=0$ ce qui n'est pas le cas (car $\ker(f)\neq E$). Ainsi f n'est pas diagonalisable.

Partie II - Étude d'un produit scalaire

6. Soit $(P_1,P_2,Q)\in\mathbb{R}_4[X]^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\langle P_1+\lambda P_2,Q\rangle&=\sum_{k=0}^{4}(P_1+\lambda P_2)(k)Q(k)\\&=\sum_{k=0}^{4}P_1(k)Q(k)+\lambda P_2(k)Q(k)\\&=\sum_{k=0}^{4}P_1(k)Q(k)+\lambda\sum_{k=0}^{4}P_2(k)Q(k)\\&=\langle P_1,Q\rangle+\lambda\langle P_2,Q\rangle\end{aligned}$$

Ainsi l'application $(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle$ est linéaire à gauche.
On a de plus

$$\langle P,Q\rangle=\sum_{k=0}^{4}P(k)Q(k)=\sum_{k=0}^{4}Q(k)P(k)=\langle Q,P\rangle$$

Ainsi l'application $(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle$ est symétrique, comme elle est linéaire à gauche elle est donc bilinéaire.
Pour $P\in\mathbb{R}_4[X]$ on a

$$\langle P,P\rangle=\sum_{k=0}^{4}P(k)^2\geqslant 0$$

Ainsi l'application $(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle$ est une forme bilinéaire positive.
Enfin soit $P\in\mathbb{R}_4[X]$ tel que $\langle P,P\rangle=0$, on a alors $\sum_{k=0}^{4}P(k)^2=0$.
Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, ainsi

$$\forall k\in[\![0,4]\!],\qquad P(k)=0$$

P admet donc comme racines 0, 1, 2, 3 et 4. P est alors un polynôme de degré inférieur ou égal à 4 qui admet au moins 5 racines, P admet donc strictement plus de racines que son degré et donc P est le polynôme nul.
Finalement l'application $(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle$ est une forme bilinéaire définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire.

7. On va montrer que la famille (L_1,L_2,L_3) est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$\alpha L_1+\beta L_2+\gamma L_3=0$$

En particulier on a

$$\alpha L_1(1)+\beta L_2(1)+\gamma L_3(1)=0$$

$$\alpha L_1(2)+\beta L_2(2)+\gamma L_3(2)=0$$

$$\alpha L_1(3)+\beta L_2(3)+\gamma L_3(3)=0$$

C'est-à-dire

$$2\alpha = 0, \qquad -\beta = 0, \qquad 2\gamma = 0$$

Ainsi $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille (L_1, L_2, L_3) est donc libre dans $\mathbb{R}_2[X]$. Il s'agit d'une famille libre de cardinal 3 dans un espace vectoriel de dimension 3, (L_1, L_2, L_3) donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

8. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$P = aL_1 + bL_2 + cL_3$$

On a alors

$$P(1) = 2a \qquad P(2) = -b \qquad P(3) = 2c$$

Ainsi

$$P = \frac{P(1)}{2} L_1 - P(2) L_2 + \frac{P(3)}{2} L_3$$

où encore $\mathrm{Mat}_{(L_1,L_2,L_3)}(P) = \begin{pmatrix} \frac{P(1)}{2} \\ -P(2) \\ \frac{P(3)}{2} \end{pmatrix}$

(b) On a

$$\mathrm{Mat}_{(L_1,L_2,L_3)}(\Delta(L_1)) = \begin{pmatrix} \frac{\Delta(L_1)(1)}{2} \\ -\Delta(L_1)(2) \\ \frac{\Delta(L_1)(3)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_1(2)-L_1(1)}{2} \\ -L_1(3) + L_1(2) \\ \frac{L_1(4)-L_1(3)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{(L_1,L_2,L_3)}(\Delta(L_2)) = \begin{pmatrix} \frac{\Delta(L_2)(1)}{2} \\ -\Delta(L_2)(2) \\ \frac{\Delta(L_2)(3)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_2(2)-L_2(1)}{2} \\ -L_2(3) + L_2(2) \\ \frac{L_2(4)-L_2(3)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{(L_1,L_2,L_3)}(\Delta(L_3)) = \begin{pmatrix} \frac{\Delta(L_3)(1)}{2} \\ -\Delta(L_3)(2) \\ \frac{\Delta(L_3)(3)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_3(2)-L_3(1)}{2} \\ -L_3(3) + L_3(2) \\ \frac{L_3(4)-L_3(3)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{(L_1,L_2,L_3)}(\Delta) = \mathrm{Mat}_{(L_1,L_2,L_3)}(\Delta(L_1), \Delta(L_2), \Delta(L_3)) = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$$

9. (a) Soit i dans $\{1, 2, 3\}$, on a $M_i(i) = \prod_{\substack{k \neq i \\ k=0}}^{4} (i - k) \neq 0$.

(b) Soit $i \in \{1, 2, 3\}$, remarquons que, pour $k \in [\![0, 4]\!]$ on a $N_i(k) = 0$ si $k \neq i$ et $N_i(i) = 1$, ainsi

$$\|N_i\| = \sum_{k=0}^{4} N_i(k)^2 = N_i(i)^2 = 1^2 = 1$$

De plus pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}$ avec $i \neq j$ on a

$$\forall k \in [\![0, 4]\!], \qquad N_i(k) N_j(k) = 0$$

En effet $N_i(k)N_j(k)$ est nul sauf si $i = k = j$ ce qui est impossible.
Ainsi $\{N_i, N_j\} = \sum_{k=0}^{4} N_i(k)N_j(k) = 0$.
La famille (N_1, N_2, N_3) est ainsi une famille orthonormée (donc libre) de cardinal de E qui est un espace vectoriel de dimension 3, c'est donc une base orthonormée de E.

10. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ on a $\phi(L_i) = WL_i = M_i(i)N_i$. D'où

$$\phi(L_1) = M_1(1)N_1 = -6, \qquad \phi(L_2) = M_2(2)N_2 = 4, \qquad \phi(L_3) = M_3(3)N_3 = -6$$

Ainsi la matrice de l'application linéaire ϕ dans les bases (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ et (N_1, N_2, N_3) de E est

$$\mathrm{Mat}_{(N_1,N_2,N_3),(L_1,L_2,L_3)}(\phi) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

11. On sait que $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$ ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{(N_1,N_2,N_3)}(f) &= \mathrm{Mat}_{(N_1,N_2,N_3),(L_1,L_2,L_3)}(\phi)\mathrm{Mat}_{(N_1,N_2,N_3)}(\Delta)\mathrm{Mat}_{(L_1,L_2,L_3),(N_1,N_2,N_3)}(\phi^{-1}) \\
&= \mathrm{Mat}_{(N_1,N_2,N_3),(L_1,L_2,L_3)}(\phi)\mathrm{Mat}_{(N_1,N_2,N_3)}(\Delta)\mathrm{Mat}_{(N_1,N_2,N_3),(L_1,L_2,L_3)}(\phi)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 \\ -6 & -9 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{9}{4} & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

12. (a) Soit P de $\mathbb{R}_4[X]$, on a

$$u(P) = \sum_{i=1}^{3} P(i)\, N_i \in Vect(N_1, N_2, N_3)$$

D'où $u(P) \in E \subset \mathbb{R}_4[X]$.
Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_4[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$u(P + \lambda Q) = \sum_{i=1}^{3} (P + \lambda Q)(i)\, N_i = \sum_{i=1}^{3} P(i)N_i + \lambda Q(i)N_i = \sum_{i=1}^{3} P(i)N_i + \lambda \sum_{i=1}^{3} Q(i)N_i = u(P) + \lambda u(Q)$$

u est donc une application linéaire définie sur $\mathbb{R}_4[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_4[X]$, i.e. un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

(b) **Remarque :**

On peut « court-circuiter » les deux questions suivantes : On sait que, pour $k \in [\![0, 4]\!]$ on a $N_i(k) = 0$ si $k \neq i$ et $N_i(i) = 1$, et donc

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \langle P, N_i \rangle = \sum_{k=0}^{4} P(k)N_i(k) = P(i)$$

Ainsi

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \qquad u(P) = \sum_{i=1}^{3} \langle P, N_i \rangle N_i$$

On sait de plus que (N_1, N_2, N_3) une base orthonormée de E. On reconnait alors dans u l'expression de la projection orthogonale sur E.

Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$ et $j \in \{1, 2, 3\}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle P - u(P)\,,\, N_j \rangle &= \sum_{k=0}^{4} (P - u(P))(k)N_j(k) \\
&= (P - u(P))(j) \\
&= P(j) = \sum_{i=1}^{3} P(i)N_i(j) \\
&= P(j) - P(j) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(c) La question précédente nous montre que, pour $P \in \mathbb{R}_4[X]$ on a $P - u(P) \in E^{\perp}$ (car $P - u(P)$ est orthogonal à une base de E.
On a donc $u(P) \in E$ et $P - u(P) \in E^{\perp}$. Ainsi $u(P)$ est le projeté orthogonal de P sur E.
u est donc la projection orthogonal sur E.

(d) Le projeté orthogonal de $Q = X^2\,(X-2)\,(X-3)$ sur E est

$$\begin{aligned} u(Q) &= Q(1)N_1 + Q(2)N_2 + Q(3)N_3 \\ &= Q(1)N_1 \\ &= 2N_1 \\ &= -\frac{2}{6}X(X-2)(X-3)(X-4) \\ &= -\frac{X(X-2)(X-3)(X-4)}{3} \end{aligned}$$

Exercice 2 - EDHEC ECS 2019 - Exercice 3

Partie I - Définition de l'adjoint $u^\star$ d'un endomorphisme u de E.

1. (a) Par l'expression d'un vecteur dans la base orthonormée $\mathcal{B}$, on a :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

et en particulier, pour $x = u^*(y)$, nous avons $u^*(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle u^*(y), e_i \rangle e_i$.
Or $\langle u^*(y), e_i \rangle = \langle e_i, u^*(y) \rangle = \langle u(e_i), y \rangle$, donc pour tout y de E :

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y \rangle e_i$$

(b) Si u^* existe, $u^*(y)$ est parfaitement déterminé par la donnée de y, et des données de l'énoncé (u et la base $\mathcal{B}$).
$\boxed{\text{Si } u^* \text{ existe, } u^* \text{ est unique.}}$

2. (a) Soit $f : y \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y \rangle e_i$.
f est une application de E dans E (pour $y \in E$, $f(y)$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$).
Soient λ réel et x et y vecteurs de E. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), \lambda x + y \rangle e_i \\ &\quad \text{et par linéarité à droite du produit scalaire :} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda \langle u(e_i), x \rangle + \langle u(e_i), y \rangle) e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda \langle u(e_i), x \rangle e_i + \langle u(e_i), y \rangle e_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), x \rangle e_i + \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y \rangle e_i \\ &= \lambda f(x) + f(y) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire.
$\boxed{\text{L'application } u^* \text{ définie par l'égalité du 1.a. est un endomorphisme de } E.}$

(b) Enfin, pour x et y dans E, avec la notation f de la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\langle x, f(y)\rangle &= \langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i\rangle \\
&\quad \text{par linéarité à droite du produit scalaire :} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle \langle x, e_i\rangle \\
&\quad \text{par linéarité à gauche du produit scalaire :} \\
&= \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle u(e_i), y\rangle \\
&\quad \text{par linéarité de } u \text{ :} \\
&= \langle u(\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i), y\rangle = \langle u(x), y\rangle
\end{aligned}$$

Donc l'application f est solution du problème posé.
Par analyse-synthèse, nous avons montré l'existence et l'unicité de l'endomorphisme adjoint u^* de u, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

Partie II - Études des endomorphismes normaux.

3. (a) Pour $x \in E$,

$$\begin{aligned}
\|u(x)\|^2 &= \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, u^*(u(x))\rangle \\
&= \langle x, u(u^*(x))\rangle \text{ car } u \text{ est normal} \\
&= \langle u(u^*(x)), x\rangle = \langle u^*(x), u^*(x)\rangle \\
&= \|u^*(x)\|^2
\end{aligned}$$

Comme les normes sont positives, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

(b) On a $x \in \ker u \Leftrightarrow u(x) = 0 \Leftrightarrow \|u(x)\| = 0 \Leftrightarrow \|u^*(x)\| = 0 \Leftrightarrow u^*(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker u^*$.
$\boxed{\ker u = \ker u^*}$

4. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Soit $x \in F^\perp$. Pour tout $y \in F$, nous avons :

$$\langle u^*(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

Comme $y \in F$ et que F est stable par u, $u(y)$ appartient à F. Et $x \in F^\perp$, donc $\langle x, u(y)\rangle = 0$.
Ainsi $\langle u^*(x), y\rangle = 0$ et $u^*(x) \in F^\perp$.
$\boxed{\text{Si } F \text{ est stable par } u,\ F^\perp \text{ est stable par } u^*.}$

5. (a) Soit $x \in E_\lambda$. On a $u(x) = \lambda x$. En composant par u^* linéaire, on a
$u^*(u(x)) = \lambda u^*(x)$, et comme u est normal, $u(u^*(x)) = \lambda u^*(x)$. Ainsi $u^*(x) \in E_\lambda$.
$\boxed{E_\lambda \text{ est stable par } u^*.}$

(b) Soient x et y dans E. On a :

$$\begin{aligned}
\langle u(y), x\rangle &= \langle y, u^*(x)\rangle \text{ par définition de } u^* \\
\text{soit, écrit autrement, } \langle u^*(x), y\rangle &= \langle x, u(y)\rangle
\end{aligned}$$

Par la définition d'un adjoint, on reconnaît, par unicité de l'adjoint, que $(u^*)^* = u$.

On applique 5. avec $F = E_\lambda$ et l'endomorphisme u^*. On obtient : $E_\lambda^\perp$ est stable par $(u^*)^*$, c'est-à-dire u.
$\boxed{E_\lambda^\perp \text{ est stable par } u.}$

6. Montrons les implications suggérées par l'énoncé. Soit $(u, u^*) \in ((E))^2$ définis comme dans l'énoncé.

i)⇒ii) On a :

$$\begin{aligned}\langle u(x),u(y)\rangle &= \langle x,u^*(u(y))\rangle && \text{par définition de } u^* \\ &= \langle x,u(u^*(y))\rangle && \text{d'après l'hypothèse i)} \\ &= \langle u^*(x),u^*(y)\rangle && \text{par définition de } u^* \text{ et symétrie du produit scalaire}\end{aligned}$$

ii)⇒iii) Est immédiat en choisissant $y=x$.

iii)⇒ii) Employons une identité de polarisation.

$$\begin{aligned}\langle u(x),u(y)\rangle &= \frac{1}{2}(\|u(x)+u(y)\|^2-\|u(x)\|^2-\|u(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|u(x+y)\|^2-\|u(x)\|^2-\|u(y)\|^2) && \text{car } u \text{ est linéaire} \\ &= \frac{1}{2}(\|u^*(x+y)\|^2-\|u^*(x)\|^2-\|u^*(y)\|^2) && \text{d'après l'hypothèse iii)} \\ &= \frac{1}{2}(\|u^*(x)+u^*(y)\|^2-\|u^*(x)\|^2-\|u^*(y)\|^2) && \text{car } u^* \text{ est linéaire} \\ &= \langle u^*(x),u^*(y)\rangle && \text{par une identité de polarisation}\end{aligned}$$

ii)⇒i) Soit $a\in E$. Pour tout $z\in E$, on a :

$$\begin{aligned}\langle u\circ u^*(a),z\rangle &= \langle u^*(a),u^*(z)\rangle && \text{par définition de } u^* \\ &= \langle u(a),u(z)\rangle && \text{d'après ii)} \\ &= \langle u^*\circ u(a),z\rangle && \text{par définition de } u^*\end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $u\circ u^*(a)-u^*\circ u(a)$ est orthogonal à tout élément de E (il est en particulier orthogonal à lui-même) : c'est donc le vecteur nul. En définitive, $\forall a\in E$, $u\circ u^*(a)-u^*\circ u(a)=0_E$, donc $u\circ u^*-u^*\circ u=0_{\mathcal{L}(E)}$, d'où i).

Problème 3 - EML ECS 2002 - Problème 2

Partie I - Étude d'un exemple

1. Remarquons que l'on peut écrire $\varphi(P,Q)=\sum_{k=-1}^{1}P(k)Q(k)$
Soit $(P_1,P_2,Q)\in\mathbb{R}_2[X]^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(P_1+\lambda P_2,Q) &= \sum_{k=-1}^{1}(P_1+\lambda P_2)(k)Q(k) \\ &= \sum_{k=-1}^{1}P_1(k)Q(k)+\lambda P_2(k)Q(k) \\ &= \sum_{k=-1}^{1}P_1(k)Q(k)+\lambda\sum_{k=-1}^{1}P_2(k)Q(k) \\ &= \varphi(P_1,Q)+\lambda\varphi(P_2,Q)\end{aligned}$$

Ainsi φ est linéaire à gauche.
On a de plus

$$\varphi(P,Q)=\sum_{k=-1}^{1}P(k)Q(k)=\sum_{k=-1}^{1}Q(k)P(k)=\varphi(Q,P)$$

Ainsi l'application φ est symétrique, comme elle est linéaire à gauche elle est donc bilinéaire.
Pour $P\in\mathbb{R}_2[X]$ on a

$$\varphi(P,P)=\sum_{k=-1}^{1}P(k)^2\geqslant 0$$

Ainsi l'application φ est une forme bilinéaire positive.
Enfin soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$, on a alors $\sum_{k=-1}^{1} P(k)^2 = 0$.
Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, ainsi

$$\forall k \in [\![-1,1]\!], \qquad P(k) = 0$$

P admet donc comme racines -1, 0 et 1. P est alors un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 qui admet au moins 3 racines, P admet ainsi strictement plus de racines que son degré et donc P est le polynôme nul.
Finalement $\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est une forme bilinéaire définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire.}}$

2. (a) Soit $P \in E$, il existe donc $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$. On a alors

$$\begin{aligned} 2P'(0) - P(1) + P(-1) &= 2(2a \times 0 + b) - (a+b+c) + (a(-1)^2 + b(-1) + c) \\ &= 2b - a - b - c + a - b + c \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall P \in E, \qquad 2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0}$$

(b) Soit $P \in \mathbb{R}^2[X]$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(u(P),P) &= \varphi(2P'(0)X^2 - (P(1)+P(-1))X, P) \\ &= 0P(0) + (2P'(0) - P(1) - P(-1))P(1) + (2P'(0) + P(1) + P(-1))P(-1) \\ &= (P(-1)+P(1))\,2P'(0) - P(1)^2 + P(-1)^2 \\ &= (P(-1)+P(1))\,2P'(0) + (P(-1)+P(1))\,(P(-1)-P(1)) \\ &= (P(-1)+P(1))\,\big(2P'(0) + P(-1) - P(-1)\big) \\ & (P(-1)+P(1)) \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{u \text{ est bien un endomorphisme antisymétrique de } E.}$

3. (a) On a

$$u(P_1) = 2P_1'(0)X^2 - (P_1(1) + P_1(-1))X = 2\frac{1}{2}X^2 - (1+0)X = X^2 - X$$

On a donc $P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - X)$
Et

$$u^2(P_1) = u(u(P_1)) = 2 \times (-1)X^2 - (0+2)X = -2X^2 - 2X = -4P_1$$

Ainsi $\boxed{P_1 \text{ est un vecteur propre de } u \text{ associé à la valeur propre } -4.}$
Comme u est antisymétrique on sait que, pour tout $P \in E$, $u(P)$ et P sont orthogonaux, on a donc $\varphi(u(P_1), P_1) = 0$.
Ainsi

$$\varphi(P_2, P_1) = \varphi\left(\frac{1}{2}u(P_1), P_1\right) = \frac{1}{2}\varphi(u(P_1), P_1) = 0$$

La famille (P_1, P_2) est donc orthogonale.
Enfin

$$\begin{aligned} \|P_1|^2 &= \varphi(P_1, P_1) \\ &= P_1(0)^2 + P_1(1)^2 + P_1(-1)^2 \\ &= 0^2 + 1^2 + 0^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'où $\|P_1\| = \sqrt{\|P_1|^2} = 1$

Et

$$\begin{aligned}\|P_2|^2 &= \varphi(P_2, P_2)\\ &= P_2(0)^2 + P_2(1)^2 + P_2(-1)^2\\ &= 0^2 + 0^2 + 1^2\\ &= 1\end{aligned}$$

D'où $\|P_2\| = \sqrt{\|P_2|^2} = 1$.

Finalement $\boxed{\text{la famille } (P_1, P_2) \text{ est une famille orthonormale.}}$

(b) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathrm{Ker}(u)$, on a alors $2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))X = 0$
Le polynôme $2P'(0)X^2 - (P_1(1) + P(-1))X$ est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on a donc

$$\begin{cases}2P'(0) &= 0\\ P(1)+P(-1) &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2b &= 0\\ a+b+c+a-b+c &= 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}b &= 0\\ a+c &= 0\end{cases}$$

Ainsi

$$P = aX^2 + bX + c \in \mathrm{Ker}(u) \;\Leftrightarrow\; P = a(X^2 - 1)$$

On a donc $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(X^2 - 1)$. Le polynôme $X^2 - 1$ est non-nul, il forme donc une famille libre.
Ainsi $\boxed{X^2 - 1 \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(u).}$

(c) On va poser $P_3 = X^2 - 1$ et considérer la famille (P_1, P_2, P_3).
On a $\|P_3\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2} = 1$. Ainsi P_3 est une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(u)$.
On a de plus

$$\varphi(P_1, P_3) = P_1(0)P_3(0) + P_1(1)P_3(1) + P_1(-1)P_3(-1) = 0 \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 0$$

Et

$$\varphi(P_2, P_3) = P_2(0)P_3(0) + P_2(1)P_3(1) + P_2(-1)P_3(-1) = 0 \times (-1) + 0 \times 0 + 1 \times 0 = 0$$

La famille (P_1, P_2, P_3) est donc une famille orthonormale, elle est en particulier libre . C'est une famille orthonormale de cardinal 3 dans E qui est de dimension 3, c'est donc une base orthonormale de E.
Notons $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$. On a

$$u(P_1) = 2P_2, \qquad u(P_2) = \frac{1}{2}u(u(P_1)) = \frac{1}{2}(-4P_1) = -2P_1, \qquad u(P_3) = 0$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{B} = \left(\tfrac{1}{2}(X^2+X), \tfrac{1}{2}(X^2-X), X^2-1\right) \text{ est une base orthonormée de } E \text{ et}}$

$\boxed{\text{la matrice associée à } u \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est :}}$

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

Partie II - Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

1. Soit $(x, y) \in E^2$ on a

$$\boxed{\langle u(x+y), x+y\rangle = \langle u(x)+u(y), x+y\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle u(y), y\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle}$$

Supposons que u soit un endomorphisme antisymétrique, on a alors, pour $(x, y) \in E^2$

$$0 = \langle u(x+y), x+y\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle u(y), y\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle = 0 + 0 + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle$$

D'où
$$\forall (x,y)\in E^2,\qquad \langle u(x),y\rangle = -\langle u(y),x\rangle = -\langle x,u(y)\rangle$$
Supposons désormais que
$$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle u(x),y\rangle = -\langle x,u(y)\rangle$$
Soit $x\in E$, on a alors
$$\langle u(x),x\rangle = -\langle x,u(x)\rangle = -\langle u(x),x\rangle$$
Ainsi
$$\forall x\in E,\qquad \langle u(x),x\rangle = 0$$
u est donc antisymétrique
Finalement $\boxed{u \text{ est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :}}$
$$\boxed{\forall (x,y)\in E^2,\ \langle u(x),y\rangle = -\langle x,u(y)\rangle}$$

2. (a) Soit $j\in [\![1,n]\!]$, d'après l'expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée on a
$$u(e_j)=\sum_{i=1}^n \langle u(e_j),e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle e_i,u(e_j)\rangle e_i$$
Ainsi, par définition de la matrice d'un endomorphisme, la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$ vérifie
$$\boxed{\forall (i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2,\ m_{i,j}=\langle e_i,u(e_j)\rangle}$$

(b) Supposons dans un premier temps que u est un endomorphisme antisymétrique. On a alors, pour $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$
$$m_{i,j}=\langle e_i,u(e_j)\rangle = -\langle u(e_i),e_j\rangle = -\langle e_j,u(e_i)\rangle = -m_{j,i}$$
On a ainsi
$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\qquad m_{i,j}=-m_{j,i}$$
C'est-à-dire ${}^tM=-M$.
Supposons maintenant que ${}^tM=-M$. En d'autres termes on a
$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\qquad \langle e_i,u(e_j)\rangle = -\langle u(e_i),e_j\rangle$$
Soit $x\in E^2$, on a
$$\begin{aligned}
\langle u(x),x\rangle &= \left\langle u\left(\sum_{i=1}^n \langle x,e_i\rangle e_i\right), \sum_{j=1}^n \langle x,e_j\rangle e_j\right\rangle\\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle x,e_i\rangle u(e_i), \sum_{j=1}^n \langle x,e_j\rangle e_j\right\rangle && \textit{par linéarité de } u\\
&= \sum_{i=1}^n \langle x,e_i\rangle \left\langle u(e_i), \sum_{j=1}^n \langle x,e_j\rangle e_j\right\rangle && \textit{par linéarité à gauche du produit scalaire}\\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \langle x,e_j\rangle\langle x,e_i\rangle\,\langle u(e_i),e_j\rangle && \textit{par linéarité à droite du produit scalaire}\\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \langle x,e_j\rangle\langle x,e_i\rangle\times 0 && \textit{par hypothèse}\\
&=0
\end{aligned}$$
On a donc montré que
$$\forall x\in E,\qquad \langle u(x),x\rangle = 0$$
u est donc antisymétrique.
Finalement on a montré que :
$\boxed{u \text{ est antisymétrique si et seulement si la matrice } M \text{ associée à } u \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ vérifie } {}^tM=-M.}$

Partie III - Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

1. Soit λ une valeur propre de u et $x \in E$ un vecteur propre associé, on a alors
$$\langle u(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$$
Or, comme u est antisymétrique, on a $\langle u(x), x\rangle = 0$.
Ainsi $\lambda\|x\|^2 = 0$. x est un vecteur propre, on a donc $x \neq 0_E$ et, par suite, $\|x\| \neq 0$. D'où $\lambda = 0$
Finalement, $\boxed{\text{si } \lambda \text{ est une valeur propre de } u \text{ alors } \lambda = 0.}$
2. Soit $x \in \operatorname{Im}(u)$ et $y \in \operatorname{Ker}(u)$. Il existe donc $z \in E$ tel que $x = u(z)$. On a alors
$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle u(z), y\rangle \\ &= -\langle z, u(y)\rangle \qquad \textit{car } u \textit{ antisymétrique} \\ &= -\langle z, 0\rangle \qquad \textit{car } y \in \operatorname{Ker}(u) \\ &= 0\end{aligned}$$
$\boxed{\operatorname{Im}(u) \text{ et } \operatorname{Ker}(u) \text{ sont donc orthogonaux.}}$
En particulier on a $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$.
D'après le théorème du rang, on a $\dim(E) = \dim(\operatorname{Im}(u)) + \dim(\operatorname{Ker}(u))$, ainsi
$\boxed{\operatorname{Im}(u) \text{ et } \operatorname{Ker}(u) \text{ sont supplémentaires}}$ (plus précisément $\operatorname{Im}(u)$ est le supplémentaire orthogonal de $\operatorname{Ker}(u)$ et vice-versa).
On va procéder par double inclusion
Soit $x \in \operatorname{Ker}(u)$, on a alors
$$u^{(}x) = u(u(x) = u(0_E) = 0_E$$
Ainsi $x \in \operatorname{Ker}(u^2)$, on a donc $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(u^2)$.
Soit maintenant $y \in \operatorname{Ker}(u^2)$.
On a alors $u(y) \in \operatorname{Im}(u)$ mais également $u(y) \in \operatorname{Ker}(u)$ (puisque $u(u(y)) = u^2(y) = 0_E$).
Or $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$, ainsi $u(y) = 0_E$ et donc $y \in \operatorname{Ker}(u)$.
On a ainsi montré que $\operatorname{Ker}(u^2) \subset \operatorname{Ker}(u)$.
Finalement on a bien $\boxed{\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2).}$
3. Soit λ une valeur propre de u^2 et $x \in E$ un vecteur propre associé, on a alors
$$\langle u^2(x), x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \lambda\|x\|^2$$
Mais également, comme u est antisymétrique,
$$\langle u^2(x), x\rangle = -\langle u(x), u(x)\rangle = \|u(x)\|^2$$
Ainsi $\lambda = -\frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} \leqslant 0$. ($\|x| \neq 0$ car $x \neq 0_E$.)
On a donc montré que $\boxed{\text{toute valeur propre de } \lambda \text{ est négative ou nulle.}}$
4. (a) Soit $(x, y) \in E^2$, on a alors
$$\langle u^2(x), y\rangle = -\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, u^2(y)\rangle$$
Ainsi $\boxed{u \text{ est un endomorphisme symétrique}}$. En particulier u^2 est diagonalisable.
Supposons par l'absurde que u^2 n'admet pas de valeurs propres non-nulle. Comme u^2 est diagonalisable il admet des valeurs propres, 0 est donc la seule valeur propre de u^2.
Puisque u^2 est diagonalisable et 0 est la seule valeur propre de u^2 alors $u^2 = 0\mathrm{Id}$.
On a donc $\operatorname{Ker}(u^2) = E$.
Or $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^2)$, ainsi $\operatorname{Ker}(u) = E$. u est donc l'endomorphisme nul. Ceci est absurde car on a supposé que u n'était pas l'endomorphisme nul.
Finalement $\boxed{u^2 \text{ admet au moins une valeur propre non-nulle}}$ (en particulier strictement négative d'après 3.).

(b) Il nous faut montrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 et que F est stable par u.
La famille $(x, u(x)$ engendre F, montrons que c'en est une base.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha x + \beta u(x) = 0_E$.
Alors en composant par u on a $\alpha u(x) + \beta u^2(x) = 0_E$, c'est-à-dire $\alpha u(x) + \lambda\beta x = 0_E$.
On a ainsi le système $\begin{cases} \alpha x + \beta u(x) = 0_E \\ \lambda\beta x + \alpha u(x) = 0_E \end{cases}$
Supposons par l'absurde $\alpha \neq 0$ alors l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{\beta}{\alpha} L_2$ nous donne

$$\left(\alpha - \frac{\lambda\beta^2}{\alpha}\right) x = 0_E$$

Puisque $x \neq 0_E$ on a donc $\alpha - \frac{\lambda\beta}{\alpha} = 0$, c'est-à-dire $\alpha^2 = \lambda\beta^2$.
Or $\lambda < 0$, ainsi $\lambda\beta^2 \leqslant 0$ et donc $0 \leqslant \alpha^2 \leqslant 0$.
On a ainsi $\alpha = 0$. Ceci conclut notre raisonnement par l'absurde, l'hypothèse $\alpha \neq 0$est absurde, on a donc bien $\alpha = 0$.
On en déduit alors via notre deuxième équation que $\lambda\beta x = 0_E$, d'où, comme $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0_E$, $\beta = 0$.
Finalement $\alpha = \beta = 0$, la famille $(x, u(x))$ est libre. C'est donc une base de F.
On en déduit que $\dim(F) = 2$. $\boxed{F \text{ est bien un plan vectoriel de } E.}$
Vérifions maintenant la stabilité.
Soit $y \in E$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $y = ax + bu(x)$.
Alors $u(y) = au(x) + bu^2(x) = au(x) + b\lambda x \in \text{Vect}(x, u(x)) = F$.
On a montré que

$$\forall y \in F, \qquad u(y) \in F$$

En d'autres termes $\boxed{F \text{ est stable par } u.}$

(c) Soit $z \in F^\perp$. Montrer que $u(z) \in F^\perp$ revient à montrer que, pour tout $y \in F$, $\langle u(z), y\rangle = 0$.
Soit $y \in F$, on a alors $\langle u(z), y\rangle = -\langle z, u(y)\rangle$.
Or $u(y) \in F$ d'après la question précédente et $z \in F^\perp$, ainsi $\langle z, u(y)\rangle = 0$ et donc $\langle u(z), y\rangle = 0$.
Finalement $u(z) \in F^\perp$. $\boxed{F^\perp \text{ est bien stable par } u.}$

(d) Soit $x \in F^\perp$, on a

$$\langle u_1(x), x\rangle_1 = \langle u_1(x), x\rangle = \langle u(x), x\rangle = 0$$

Ainsi $\boxed{u_1 \text{ est bien un endomorphisme antisymétrique de } F^\perp.}$
Soit $y \in \text{Im}(u)$, il existe alors $z \in E$ tel que $y = u(z)$.
Or $E = F \oplus F^\perp$, il existe alors $z_1 \in F$ et $z_2 \in F^\perp$ tels que $z = z_1 + z_2$.
D'où

$$y = u(z) = u(z_1) + u(z_2) = u(z_1) + u_1(z_2)$$

$u(z_1) \in F$ car $z_1 \in F$ et F est stable par u. $u_1(z_2) \in \text{Im}(u_1)$.
Ainsi on a montré que $\text{Im}(u) = F + \text{Im}(u_1)$.
Soit $a \in F$ et $b \in \text{Im}(u_1)$ alors $a \in F$ et $b \in F^\perp$, d'où $\langle a, b\rangle = 0$. Ainsi F et $\text{Im}(u_1)$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux, ils sont donc en somme directe et ainsi

$$\boxed{\text{Im}(u) = F \oplus \text{Im}(u_1)}$$

5. On va procéder par récurrence double sur la dimension n de E.
Initialisation :
Si $n = 0$ alors $E = \{0_E\}$ et le seul endomorphisme de E est l'endomorphisme nul qui est de rang 0 donc de rang pair
On suppose ici $n = 1$. u est alors une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, u est donc de la forme $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Puisque u est antisymétrique on a alors, pour $x \in \mathbb{R}$

$$0 = \langle u(x), x\rangle = ax \times x = ax^2$$

Ainsi $a = 0$, u est donc l'endomorphisme nul, en particulier $\text{Rang}(u) = 0$, le rang de u est donc bien pair.

Hérédité :

Soit $n \geqslant 2$. On suppose avoir montré que tout endomorphisme antisymétrique dans un espace euclidien de dimension $n-2$ ou $n-1$ est de rang pair.

On considère un espace euclidien E de dimension n et u un endomorphisme antisymétrique de E.

Si u est l'endomorphisme nul alors u est de rang 0 qui est bien un nombre pair.

Sinon soit x un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre non nulle et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, u(x))$.

Avec les notations de la question 4.d) on a alors $\text{Im}(u) = F \oplus \text{Im}(u_1)$. D'où

$$\text{Rang}(u) = \dim(\text{Im}(u)) = \dim(F) + \dim(\text{Im}(u_1)) = 2 + \text{Rang}(u_1)$$

u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ et $F^\perp$ est de dimension $n-2$, ainsi, par hypothèse de récurrence $\text{Rang}(u_1)$ est pair et donc $\text{Rang}(u)$ est également pair.

On a ainsi montré que par récurrence que $\boxed{\text{tout endomorphisme antisymétrique est de rang pair.}}$

Partie IV - Application

1. La matrice de u dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tA = -A$. D'après le critère de la question $II2.b$) $\boxed{u \text{ est un endomorphisme antisymétrique.}}$
   On a
   $$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^2(f_1)) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^2)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1) \\ &= A^2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\-9\\9\\0\end{pmatrix} \\ &= -9 \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1)\end{aligned}$$
   Ainsi $u^2(f_1) = 9f_1$. $\boxed{\text{Le vecteur } f_1 = e_1 + e_2 - e_3 \text{ est vecteur propre de } u^2 \text{ pour la valeur propre } -9.}$
2. $u(f_1) = 3e_1 - 3e_2 - 3e_4$.
   On va déterminer un base orthonormale de F en appliquant le procédé de Gramm-Schmidt à la famille $(f_1, u(f_1))$.
   La base (e_1, e_2, e_3, e_4) étant orthonormé, on a , d'après le théorème de Pythagore
   $$\|f_1\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + \|-e_3\|^2 = 3$$
   Posons alors $g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 - e_3)$
   Calculons ensuite $u(f_1) - \langle u(f_1), g_1\rangle g_1$.
   On a
   $$\langle u(f_1), g_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle u(f_1), f_1\rangle = 0 \quad \textit{car } u \textit{ est antisymétrique}$$
   D'où $u(f_1) - \langle u(f_1), g_1\rangle g_1 = u(f_1)$.
   D'après le théorème de Pythagore on a
   $$\|u(f_1)\|^2 = 9 + 9 + 9 = 27$$
   On pose alors $g_2 = \frac{u(f_1)}{\|u(f_1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_4)$
   $\boxed{\text{La famille } (g_1, g_2) \text{ est alors une base orthonormée de } F.}$
   Déterminons maintenant $F^\perp$.

Soit $x = ae_1 + b_e2 + ce_3 + de_4 \in E$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$\begin{aligned}
x \in F^\perp \quad & \Leftrightarrow \begin{cases} \langle x, f_1 \rangle & = 0 \\ \langle x, u(f_1) \rangle & = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c & = 0 \\ 3a - 3b - 3d & = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c & = 0 \\ -2b + c - d & = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} a & = -b + c \\ d & = -2b + c \end{cases} \\
& \Leftrightarrow x = b(-e_1 + e_2 - 2e_4) + c(e_1 + e_3 + e_4)
\end{aligned}$$

Ainsi $F^\perp = \text{Vect}(-e_1 + e_2 - 2e_4, e_1 + e_3 + e_4)$
Notons u_1 l'endomorphisme u restreint à $F^\perp$. u_1 est aussi un endomorphisme antisymétrique. On va chercher un vecteur propre de u_1^2.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $x = a(-e_1 + e_2 - 2e_4) + b(e_1 + e_3 + e_4) = (-a + b)e_1 + ae_2 + be_3 + (-2a + b)e_4$.
On a alors

$$u(x) = 6ae_1 + (6a - 6b)e_2 + (12a - 6b)e_3 + 6be_4$$
$$u^2(x) = (36a - 36b)e_1 - 36ae_2 - 36be_3 + (72a - 36b)e_4 = -36x$$

N'importe quel vecteur de $F^\perp$ est une vecteur propre de u_1 pour la valeur propre -36.
On va prendre pour f_3 un tel vecteur (relativement simple), par exemple $f_3 = e_2 + e_3 - e_4$.
On pose alors $g_3 = \frac{1}{\|f_3\|} f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 + e_3 - e_4)$.
On prend ensuite

$$\begin{aligned}
g_4 &= \frac{u(f_3) - \langle u(f_3), g_3 \rangle g_3}{\|u(f_3) - \langle u(f_3), g_3 \rangle g_3\|} \\
&= \frac{u(f_3)}{\|u(f_3)\|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{36 + 36 + 36}}(6e_1 + 6e_2 + 6e_4) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_4)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Alors, la famille } (g_3, g_4) \text{ est une base orthonormée de } F^\perp.}$

3. La famille $\mathcal{B}_0 = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ est obtenue en concatenant une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^\perp$, c'est donc une base orthonormée de E
$\boxed{\text{La famille } \mathcal{B}_0 = (g_1, g_2, g_3, g_4) \text{ est une base orthonormale de } E}$.
On a

$$u(g_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} u(f_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} 2\sqrt{3} g_2 = 3g_2$$
$$u(g_2) = \frac{1}{3\sqrt{3}} u(u(f_1)) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - 9f_1 = -\frac{3}{\sqrt{3}} f_1 = -3g_1$$
$$u(g_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} u(f_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} 6\sqrt{3} g_4 = 6g_4$$
$$u(g_4) = \frac{1}{6\sqrt{3}} u(u(g_1)) = \frac{1}{6\sqrt{3}} - 36f_1 = -\frac{6}{\sqrt{3}} f_3 = -6g_3$$

Ainsi $\boxed{\text{la matrice associée à } u \text{ relativement à } \mathcal{B}_0 \text{ est}}$

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}}$$