Révisions - Ecricome 2009

Exercice 1

$M_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Pour tout élément $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de $M_n(\mathbb{R})$, on appelle « trace de A », et on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

On admet que Tr est une application linéaire de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall B \in M_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

On note ${}^tA$ la transposée de la matrice A. Pour toutes matrices M, N de $M_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\langle M|N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}n_{i,j}$$

où $m_{i,j}$ (resp. $n_{i,j}$) désigne le coefficient de M (resp. N) situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.
Soit A une matrice symétrique, on considère :

- l'application Φ_A de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ \Phi_A(M) = AM - MA$.
- l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ formé des valeurs propres de A.
- l'ensemble $\mathrm{Sp}(\Phi_A)$ formé des valeurs propres de Φ_A.
- L'ensemble $\Gamma = \{\lambda - \mu,\ (\lambda, \mu) \in (\mathrm{Sp}(A))^2\}$ formé des différences de deux valeurs propres quelconques de A.

Le but de cet exercice est d'établir que les deux propriétés suivantes sont valables pour toute matrice symétrique à coefficients réels A :

- ⋆ Φ_A est un endomorphisme diagonalisable.
- ⋆ les valeurs propres de Φ_A forment l'ensemble Γ c'est-à-dire que $\mathrm{Sp}(\Phi_A) = \Gamma$.

Partie I - Étude d'un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on admet les deux propriétés suivantes :

- Φ_A est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$,
- la famille (V_1, V_2, V_3, V_4) est une base de base de $M_n(\mathbb{R})$ où l'on a posé :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que la matrice T de l'endomorphisme Φ_A dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) s'écrit : $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   En déduire la diagonalisabilité de T.
2. Vérifier que $T^3 = 4T$. Qu'en déduit-on sur les valeurs propres de T ?
3. Déterminer une base de l'espace propre associée à 0 de la matrice T.
4. Calculer TX_1 et TX_2 où $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Expliciter alors une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $T = PDP^{-1}$ *(on ne demande pas le calcul de P^{-1}).*

Partie II - Réduction de Φ_A dans le cas général

On revient désormais au cas général, A étant une matrice symétrique quelconque de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Prouver que l'application $(M, N) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto \langle M|N\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Établir que, pour toutes matrices M, N appartenant à $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\langle \Phi_A(M)|N\rangle = \langle M|\Phi_A(N)\rangle$.
   En déduire que Φ_A est un endomorphisme diagonalisable.
4. Soient :
   - $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ,
   - $Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.

   On pose alors : $M_{X,Y} = X^tY \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que $M_{X,Y} \neq 0$ puis que ${}^tYA = \mu{}^tY$.
   (b) Établir que $\Phi_A(M_{X,Y}) = (\lambda - \mu)M_{X,Y}$ puis que $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(\Phi_A)$.
5. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α.
   (a) On suppose que pour tout vecteur propre Z de A, on a $MZ = 0$.
   Montrer alors que $M = 0$.
   En déduire qu'il existe au moins un vecteur propre Z_0 de A tel que $MZ_0 \neq 0$.
   On note μ la valeur propre associée à Z_0.
   (b) En revenant à l'expression de $\Phi_A(M)$, justifier que MZ_0 est un vecteur propre de A pour une valeur propre dont on précisera l'expression à l'aide de α et μ.
   (c) Conclure.

Exercice 2

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1 + x^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t.$$

1. Domaine de définition de f :
   (a) Justifier que pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t$ est convergente et donner sa valeur.
   (b) Soit x un réel fixé. Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1 + x^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t$.

   Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement paire. On va donc l'étudier sur $[0, +\infty[$.
2. Branche infinie de la courbe représentative de f :
   (a) Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et pour tout réel t positif ou nul :
   $$x\mathrm{e}^t \leq \sqrt{1 + x^2\mathrm{e}^{2t}} \leq x\mathrm{e}^t + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}.$$
   (b) Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a :
   $$x \leq f(x) \leq x + \frac{1}{6x}.$$
   (c) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$.

   On dit alors que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.
3. Dérivabilité et monotonie de f :
   (a) À l'aide du changement de variable $u = x\mathrm{e}^t$, que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque x est un réel strictement positif :
   $$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^3}\mathrm{d}u.$$

(b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée est donnée pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

(c) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :

$$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

4. Étude locale de f et f' en 0 :

(a) Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u$$

et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u$ est convergente.

(b) À l'aide des questions précédentes, démontrer alors que l'on a :

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x) \quad \text{et} \quad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$

(c) En déduire que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

Problème 3

Dans tout le problème, a et b désignent des entiers naturels tous deux non nuls et l'on note $N = a+b$.
On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, au « hasard » et « avec remise » d'une boule, en procédant de la façon suivante :

- lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant,
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée dans cette urne par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant.

Partie I

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Préciser soigneusement l'ensemble des valeurs prises par la variable Y.
2. Pour tout entier k compris entre 1 et $b+1$, calculer la valeur de la probabilité $P(Y=k)$.
3. Vérifier que : $P(Y=b+1) = \frac{b!}{N^b}$ et que pour tout entier k compris entre 1 et b, la formule suivante est vraie :

$$P(Y=k) = \frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k}.$$

4. Soient M un entier naturel non nul et a_0, a_1, ..., a_M une famille de réels. Établir que :

$$\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k\right) - Ma_M.$$

5. En déduire que $E(Y) = \sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!N^k}$.

Partie II

Dans cette partie on note :

- pour tout entier $n \geq 1$, q_n la probabilité de l'événement, noté N_n : « la $n^{\text{ème}}$ boule tirée est noire »,
- pour tout entier $n \geq 0$, X_n le nombre aléatoire de boules noirées obtenues au cours des n premiers tirages. Par convention, $X_0 = 0$,

- pour tous entiers $n \geq 0$ et $k \geq 0$, $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement : « au cours des n premiers tirages, on a obtenu exactement k boules noires ».

On remarquera que $p_{0,0} = 1$ et que $p_{n,k} = 0$ si $k > n$ ou si $k > b$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $p_{n,0}$ puis $p_{n,n}$. Que vaut la somme $\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}$?
2. Démontrer la formule suivante, valable pour tous les entiers naturels n et k non nuls :

$$(\mathcal{A}) \ : \ N \cdot p_{n,k} = (a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1}.$$

3. Calcul de l'espérance de X_n :
   (a) À l'aide de la formule $(\mathcal{A})$ obtenue dans la question II.2, démontrer la formule pour $n \geq 1$:

$$N \cdot E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} [b + k(N-1)] p_{n-1,k}$$

   puis justifier que : $E(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_{n-1}) + \frac{b}{N}$.

   (b) À l'aide de la formule ci-dessus, écrire une fonction `Python` fournissant le calcul de $E(X_{2009})$ lorsque $b = 10$ et $N = 100$.

   (c) En utilisant la dernière formule établie à la question II.3a, prouver que, pour tout entier naturel n, on a :

$$E(X_n) = b\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

4. Calcul de q_n :
   (a) En utilisant une formule des probabilités totales, établir la formule suivante, valable pour tout entier naturel n :

$$N \cdot q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (b-k) p_{n,k}.$$

   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer alors q_{n+1} en fonction de $E(X_n)$ et en déduire l'expression de q_{n+1} en fonction de n, b, N.

5. Calcul de la variance de X_n :
   On introduit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par : $u_n = E(X_n(X_n - 1))$.

   (a) À l'aide de la formule $(\mathcal{A})$ obtenue dans la question II.2, montrer que l'on a :

$$N \cdot u_n = \sum_{k=1}^{n-1} [k(k-1)(a+b-2) + 2(b-1)k] p_{n-1,k}.$$

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ satisfait à la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right) u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right].$$

   (c) À l'aide d'une récurrence, démontrer que la formule suivante est valable pour tout entier naturel n :

$$u_n = b(b-1)\left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

   (d) Donner la valeur de $V(X_n)$ puis préciser sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.