Correction - Ecricome 2009

Exercice 1

Partie I - Étude d'un cas particulier

1.

Calculons les images des vecteurs de base par Φ_A. On a :

$$\Phi_A(V_1) = AV_1 - V_1A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -V_2 + V_3.$$

On a de même :

$$\begin{aligned} \Phi_A(V_2) &= -V_1 + V_4, \\ \Phi_A(V_3) &= V_1 - V_4, \\ \Phi_A(V_4) &= V_2 - V_3. \end{aligned}$$

Et donc la matrice T de Φ_A dans la base des V_i est :

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2.

Calculons :

$$\begin{aligned} T^3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{4T.} \end{aligned}$$

On en déduit que $X^3 - 4X$ est un polynôme annulateur de T. Or $X^3 - 4X = X(X^2 - 4) = X(X - 2)(X + 2)$ qui a donc pour racines $\{-2, 0, 2\}$.
Or les valeurs propres de T sont nécessairement racines du polynôme annulateur trouvé. Donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(T) \subset \{-2, 0, 2\}.}$$

3.

Techniquement, pour l'instant on ne sait pas que $E_0(T)$ est effectivement un espace propre, puisqu'on ne sait pas si 0 est bien une valeur propre.
Mais on peut chercher une base de l'espace et si on n'en trouve une non-vide, cela prouvera du même coup que 0 est bien valeur propre.

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -y+z & = & 0 \\ -x+t & = & 0 \\ x-t & = & 0 \\ y-z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x-t & = & 0 \\ y-z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre l'espace $E_0(T)$.

Et comme elle est clairement libre, <u>c'en est une base.</u>

4.

Calculons :

$$\boxed{TX_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2X_1.}$$

X_1 est donc vecteur propre de T pour la valeur propre 2.

De même, on a :

$$\boxed{TX_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2X_2}$$

et X_2 est donc vecteur propre de T pour la valeur propre -2.

5.

On pose $\mathcal{B}' = (U_1, U_2, U_3, U_4) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ la famille constituée des vecteurs étudiés jusqu'à présent. Puisque c'est la concaténation de familles libres issus d'espaces propres distincts, elle est à son tour libre. Et comme elle est de taille 4 dans un espace de dimension 4, c'est une base.

$\mathcal{B}'$ est donc une base de $\mathbb{R}^4$ constituée de vecteurs propres de T.

On pose donc :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base (V_1, V_2, V_3, V_4) à la base $\mathcal{B}'$ (qui est donc inversible). Et on a donc :

$$\boxed{T = PDP^{-1}}$$

avec :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}.$$

Partie II - Réduction de Φ_A dans le cas général

1.

Pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\Phi_A(M) = AM - MA \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Il suffit donc de vérifier que Φ_A est linéaire pour montrer que c'est un endomorphisme.
Soient $M, N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \Phi_A(M + \lambda N) &= A(M + \lambda N) - (M + \lambda N)A \\ &= AM + \lambda AN - MA - \lambda NA \\ &= AM - MA + \lambda(AN - NA) \\ &= \Phi_A(M) + \lambda \Phi_A(N). \end{aligned}$$

Donc Φ_A est bien linéaire et est donc un endomorphisme.

2.

Notons $f : (M, N) \mapsto \langle M|N \rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN)$. Vérifions les propriétés suivantes :

- **Linéarité à gauche :** Soient $M, M', N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(M + \lambda M', N) &= \mathrm{Tr}({}^t(M + \lambda M')N) \\ &= \mathrm{Tr}({}^tMN + \lambda {}^tM'N) \\ &= \mathrm{Tr}({}^tMN) + \lambda \mathrm{Tr}({}^tM'N) \\ &= f(M, N) + \lambda f(M', N). \end{aligned}$$

  Donc f est bien linéaire à gauche.

- **Symétrie :** Soient $M, N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} f(M, N) &= \mathrm{Tr}({}^tMN) \\ &= \mathrm{Tr}({}^t({}^tMN)) = \mathrm{Tr}({}^tNM) \\ &\quad \text{(car la trace est invariante par transposition)} \\ &= f(N, M). \end{aligned}$$

  Donc f est symétrique. Avec la linéarité à gauche, cela prouve que f est bilinéaire.

- **Positivité :** Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$f(M, M) = \mathrm{Tr}({}^tMM) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 \geq 0.$$

  Donc f est bien positive.

- **Définition :** Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $f(M, M) = 0$. Montrons que $M = 0$. Avec ce qui précède, on a : $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 = 0$. Or une somme de termes positifs est nulle seulement si tous les termes sont nuls. Donc $\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ m_{i,j}^2 = 0$. D'où encore : $\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ m_{i,j} = 0$. C'est-à-dire :

$$\boxed{M = 0.}$$

Donc f est bien définie.

Donc f (c'est-à-dire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$) est bien un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

3.

Soient $M, N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_A(M)|N\rangle &= \mathrm{Tr}({}^t\Phi_A(M)N) = \mathrm{Tr}({}^t(AM - MA)N) \\
&= \mathrm{Tr}({}^tM{}^tAN - {}^tA{}^tMN) = \mathrm{Tr}({}^tMAN - A{}^tMN) \text{ (car } A \text{ est symétrique)} \\
&= \mathrm{Tr}({}^tMAN) - \mathrm{Tr}(A{}^tMN) = \mathrm{Tr}({}^tMAN) - \mathrm{Tr}({}^tMNA) \text{ (car } \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)) \\
&= \mathrm{Tr}({}^tM(AN - NA)) = \mathrm{Tr}({}^tM\Phi_A(N)) \boxed{= \langle M|\Phi_A(N)\rangle.}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que Φ_A est un endomorphisme symétrique et qu'il est donc diagonalisable en base orthonormée.

4. (a)

On a :

$$M_{X,Y}Y = X{}^tYY = X\|Y\|^2 = \|Y\|^2X.$$

Or $\|Y\|^2 \neq 0$ puisque $Y \neq 0$. Et comme $X \neq 0$, on a $M_{X,Y}Y \neq 0$. On a donc : $\boxed{M_{X,Y} \neq 0}$. Par ailleurs, on a :

$$\boxed{{}^tYA = {}^tY{}^tA = {}^t(AY) = {}^t(\mu Y) = \mu{}^tY.}$$

(b)

On a :

$$\begin{aligned}
\Phi_A(M_{X,Y}) &= AM_{X,Y} - M_{X,Y}A = AX{}^tY - X{}^tYA \\
&= \lambda X{}^tY - X(\mu{}^tY) = (\lambda - \mu)X{}^tY \\
&= \boxed{(\lambda - \mu)M_{X,Y}.}
\end{aligned}$$

Comme $M_{X,Y} \neq 0$, on en déduit que $M_{X,Y}$ est vecteur propre de Φ_A pour la valeur propre $\lambda - \mu$. D'où $\lambda - \mu \in \mathrm{Sp}(\Phi_A)$. Et comme ce résultat est valable pour tout vecteur propre X associé à λ et tout vecteur propre Y associé à μ, on a bien :

$$\boxed{\Gamma \subset \mathrm{Sp}(\Phi_A).}$$

5. (a)

On suppose que pour tout vecteur propre Z de A, on a $MZ = 0$.
A est symétrique donc diagonalisable. Soient $(U_1, \ldots, U_n)$ une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. On a donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $MU_i = 0$. Mais comme les U_i forment une base, cela implique $\boxed{M = 0}$.
Or $M \neq 0$ puisque c'est un vecteur propre. Donc par contraposée, il existe Z_0 vecteur propre de A tel que $MZ_0 \neq 0$.

(b)

On a par définition de M : $\Phi_A(M) = \alpha M$. Donc en particulier :

$$\Phi_A(M)Z_0 = \alpha M Z_0.$$

Or :

$$\Phi_A(M)Z_0 = (AM - MA)Z_0 = AMZ_0 - M(\mu Z_0)$$

où on a noté μ la valeur propre de Z_0 pour A. Ainsi $AMZ_0 - \mu MZ_0 = \alpha MZ_0$ que l'on peut réécrire :

$$\boxed{AMZ_0 = (\alpha + \mu)MZ_0}$$

Comme $MZ_0 \neq 0$, MZ_0 est vecteur propre de A pour la valeur propre $\alpha + \mu$.

(c)

Ainsi si α est valeur propre de Φ_A, il existe $\mu \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $\alpha + \mu \in \mathrm{Sp}(A)$. Dit autrement, il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $\lambda = \alpha + \mu$ et donc on peut écrire :

$$\boxed{\alpha = \lambda - \mu.}$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi_A) \subset \Gamma.}$$

On a déjà montré l'inclusion réciproque et donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi_A) = \Gamma.}$$

Exercice 2

1. (a)

Pour $A \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^A \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-at}}{-a}\right]_0^A = \frac{1}{a} - \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-aA}}{a}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}0} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{a}.$$

Donc l'intégrale est bien convergente en $+\infty$ et on a :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}.}$$

(b)

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t$ est généralisée en $+\infty$.
On a pour $x \in \mathbb{R}^\star$:

$$1 + x^2\mathrm{e}^{2t} \underset{t\to+\infty}{\sim} x^2\mathrm{e}^{2t}$$

Donc :

$$\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} = (1+x^2\mathrm{e}^{2t})^{1/2} \underset{t\to+\infty}{\sim} (x^2\mathrm{e}^{2t})^{1/2} \underset{t\to+\infty}{\sim} |x|\mathrm{e}^t.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} |x|\mathrm{e}^{-t}.}$$

Et donc par comparaison d'intégrale de fonctions positives, comme $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente (question précédente), l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t$ converge également.
Pour le cas particulier $x = 0$, on a : $f(0) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$ qui converge (et vaut $\frac{1}{2}$) d'après la question précédente.

2. (a)

On cherche à montrer pour tout $x > 0$ et pour tout $t \geq 0$:

$$x\mathrm{e}^t \leq \sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \leq x\mathrm{e}^t + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}.$$

Comme tout est positif, cela revient à montrer :

$$x^2\mathrm{e}^{2t} \leq 1 + x^2\mathrm{e}^{2t} \leq \left(x\mathrm{e}^t + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}\right)^2.$$

On a clairement : $x^2\mathrm{e}^{2t} \leq 1 + x^2\mathrm{e}^{2t}$ puisque $0 \leq 1$. En outre, on a :

$$\left(x\mathrm{e}^t + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}\right)^2 = x^2\mathrm{e}^{2t} + \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4x^2} + 2x\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x} = x^2\mathrm{e}^{2t} + \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4x^2} + 1 = \left(1 + x^2\mathrm{e}^{2t}\right) + \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4x^2}}_{\geq 0} \geq 1 + x^2\mathrm{e}^{2t}.$$

Et donc on a bien pour tout $x > 0$ et pour tout $t \geq 0$:

$$\boxed{x\mathrm{e}^t \leq \sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \leq x\mathrm{e}^t + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}.}$$

(b)

Comme pour tout $t \geq 0$, on a $\mathrm{e}^{-2t} > 0$, on a en multipliant l'inégalité précédente pour tout $t \geq 0$ et tout $x > 0$:

$$x\mathrm{e}^{-t} \leq \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \leq x\mathrm{e}^{-t} + \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{2x}.$$

D'après la première question de l'exercice, les intégrales des termes de gauche et de droite convergent. Par croissance de l'intégrale, on a donc :

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \left(x\mathrm{e}^{-t} + \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{2x}\right)\mathrm{d}t.$$

Puis en calculant les intégrales : $x \times \frac{1}{1} \leq f(x) \leq x \times \frac{1}{1} + \frac{1}{2x} \times \frac{1}{3}$ c'est-à-dire :

$$\boxed{x \leq f(x) \leq x + \frac{1}{6x}.}$$

(c)

D'après la question précédente, on a : $0 \leq f(x) - x \leq \underbrace{\frac{1}{6x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}$. Et donc par encadrement, la limite existe et :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0}$$

c'est-à-dire $y = x$ est une asymptotique oblique à la courbe de f en $+\infty$.

3. (a)

Pour $x>0$, l'application $\varphi_x : t \mapsto xe^t$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante. De plus :

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_x(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0} \varphi_x(t) = x.$$

En posant $u = xe^t$, on a $t = \ln \frac{u}{x}$ et donc $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u}$. Donc les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\ln\frac{u}{x}}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2\ln\frac{u}{x}}}\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

ont même nature et sont égales si elles convergent. Or la première intégrale converge (c'est $f(x)$) et donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\ln\frac{u}{x}}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2\ln\frac{u}{x}}}\frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{x^2}{u^2}\sqrt{1+\frac{x^2\times u^2}{x^2}}\frac{\mathrm{d}u}{u} \boxed{= x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\mathrm{d}u.} \end{aligned}$$

(b)

D'après ce qui précède, pour tout $x>0$, on peut écrire :

$$f(x) = x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\mathrm{d}u = x^2\left(\underbrace{\int_x^{1}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\mathrm{d}u}_{\text{dérivable comme fonction de la borne}} + \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\mathrm{d}u}_{\text{constante}}\right).$$

Ainsi f est dérivable par opérations usuelles et pour $x>0$, on a :

$$\boxed{f'(x) = 2x\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\mathrm{d}u - x^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3} = \frac{2f(x)-\sqrt{1+x^2}}{x}.}$$

Comme f est dérivable, f est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$. Et donc f' est à son tour continue par opérations usuelles. Donc f est $\mathcal{C}^1$.

(c)

On a pour tout $x>0$:

$$f(x) = x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\mathrm{d}u.$$

Montrons la formule par intégration par partie. Soit $A>x$. On a :

$$\begin{aligned} \int_x^A \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}\mathrm{d}t &= \int_x^A \underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{u(t)}\times\underbrace{t^{-3}}_{v'(t)}\mathrm{d}t = \left[\underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{u(t)}\times\underbrace{\frac{t^{-2}}{-2}}_{v(t)}\right]_x^A - \int_x^A \underbrace{\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}_{u'(t)}\times\underbrace{\frac{t^{-2}}{-2}}_{v(t)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \int_x^A \underbrace{\frac{1}{2t\sqrt{1+t^2}}}_{\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2t^2}}\mathrm{d}t - \underbrace{\frac{\sqrt{1+A^2}}{2A^2}}_{\underset{A\to+\infty}{\sim}\frac{1}{A}}. \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_x^{+\infty}\frac{1}{2t\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$ converge car d'intégrande positive équivalente à $\frac{1}{2t^2}$ d'intégrale convergente par critère de Riemann. Et donc, en passant à la limite :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \int_x^{+\infty} \frac{1}{2u\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u.}$$

D'où :

$$\begin{aligned} 2f(x) &= 2x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\mathrm{d}u = 2x^2\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \int_x^{+\infty} \frac{1}{2u\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u\right) \\ &= \boxed{\sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}.} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} - \sqrt{1+x^2}}{x} \\ &= \boxed{x \int_x^{+\infty} \underbrace{\frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}}_{\geq 0}.} \end{aligned}$$

Par positivité de l'intégrale, on a $f'(x) \geq 0$. De plus, comme l'intégrande est continue et non nulle, on a $f'(x) \neq 0$. D'où $\boxed{f'(x) > 0}$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

4. (a)

Commençons par montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u$.
On a $t^{3/2} \times \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^{3/2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Donc :

$$\frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^{3/2}} = \underset{t\to+\infty}{o}(t^{-3/2}).$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-3/2}\mathrm{d}t$ converge par critère de Riemann. Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u$ converge absolument. De plus :

$$\frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} \underset{u\to0^+}{\sim} u\ln(u) \xrightarrow[u\to0^+]{} 0$$

où la limite se trouve par croissance comparée. Ainsi l'intégrale est faussement impropre en 0. Et l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u$ est bien convergente.
Passons à la formule. Procédons par intégration par parties. Soit $A > x$. On a :

$$\begin{aligned} \int_x^A \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}} &= \int_x^A \underbrace{\frac{1}{t}}_{u'(t)} \times \underbrace{(1+t^2)^{-1/2}}_{v(t)}\mathrm{d}t \\ &= \Big[\underbrace{\ln(t)}_{u(t)} \times \underbrace{(1+t^2)^{-1/2}}_{v(t)}\Big]_x^A - \int_x^A \underbrace{\ln(t)}_{u(t)} \times \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right) \times 2t(1+t^2)^{-3/2}}_{v'(t)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\ln(A)}{\sqrt{1+A^2}} - \frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^A \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^{3/2}}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Grâce à la convergence que l'on vient de montrer, on a :

$$\int_x^A \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^{3/2}}\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u.$$

De plus $\frac{\ln(A)}{\sqrt{1+A^2}} \underset{A\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(A)}{A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$. Donc :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u.}$$

(b)

D'après ce qui précède, on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{-x\ln(x)} &= \frac{x}{-x\ln(x)} \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{1}{\ln(x)}\left(-\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\ln(x)} \underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{}\text{constante}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1. \end{aligned}$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x).}$$

De plus, on a pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{2f(x)-\sqrt{1+x^2}}{x}$. Donc :

$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{xf'(x) + \sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{xf'(x)}{2} + \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2}.$$

Or d'une part $\frac{xf'(x)}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}$. D'autre part : $\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{1}{2}x^2}{2} = \underset{x\to 0^+}{o}(x^2\ln(x))$. Donc :

$$\frac{xf'(x)}{2} + \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.}$$

(c)

On a déjà montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. Montrons que f est dérivable en 0 et que f' est continue en 0. Commençons par montrer que f est dérivable en 0. Pour cela, calculons le taux de variation en 0. Si $h > 0$, on a :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)-\frac{1}{2}}{h} \underset{h\to 0^+}{\sim} -\frac{h^2\ln(h)}{2h} \underset{h\to 0^+}{\sim} -\frac{h\ln(h)}{2} \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0.$$

Par parité de f, on a également : $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$. Donc f est dérivable en 0 et : $\boxed{f'(0) = 0}$. De plus :

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 = f'(0).}$$

Donc f' est bien continue en 0. Ainsi f est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Problème 3

Partie I

1.

Il faut au minimum un tirage pour obtenir une boule blanche. Donc $Y \geq 1$. De plus, si on ne tire pas immédiatement une boule blanche, le nombre de boule noir diminue de 1 à chaque tirage et donc nécessairement, si on ne tire que des boules noires, au tirage $b+1$, il n'y a plus que des boules blanches dans l'urne. Donc $Y \leq b+1$. Toutes les valeurs entières intermédiaires sont possibles et donc :

$$\boxed{Y(\Omega) = [\![1, b+1]\!].}$$

2.

Soit $k \in [\![1, b+1]\!]$. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note B_i l'événement « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche » et $N_i = \overline{B_i}$ qui peut s'écrire : « la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est noire ».
Avec ces notations, on a : $[Y = k] = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$. D'après la formule des probabilités composées, on a :

$$P(Y = k) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) \times \cdots \times P_{N_1 \cap \cdots \cap N_{k-2}}(N_{k-1})P_{N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1}}(B_k).$$

On a pour tout $i \in [\![2, k]\!]$, on a : $P_{N_1 \cap \cdots \cap N_{i-1}}(N_i) = \frac{b-(i-1)}{N}$ puisqu'il reste dans ce cas $b-(i-1)$ boules noires dans l'urne dans ce cas. On a également :

$$P(N_1) = \frac{b}{N} \quad \text{et} \quad P_{N_1 \cap \cdots \cap N_k}(B_k) = 1 - P_{N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1}}(N_k) = 1 - \frac{b-(k-1)}{N}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \frac{b}{N} \times \frac{b-1}{N} \times \cdots \times \frac{b-(k-2)}{N} \times \left(1 - \frac{b-(k-1)}{N}\right) \\ &= \frac{b!}{N^{k-1}(b-(k-1))!} \times \frac{N-b+(k-1)}{N} \boxed{= \frac{b!(a+k-1)}{N^k(b-k+1)!}.} \end{aligned}$$

3.

Avec la formule précédente, on a :

$$\boxed{P(Y = b+1) = \frac{b!(a+(b+1)-1)}{N^{b+1}(b-(b+1)+1)!} = \frac{b!(a+b)}{N^{b+1}} = \frac{b!}{N^b}.}$$

De plus, pour $k \in [\![1, b]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} &\frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k} = \frac{b!N}{(b-(k-1))!N^k} - \frac{b!(b-k+1)}{(b-k+1)!N^k} \text{ (car } b-k+1>0) \\ = &\frac{b!(N-(b-k+1))}{(b-k+1)!N^k} = \frac{b!(a+k-1)}{(b-k+1)!N^k} \boxed{= P(Y = k).} \end{aligned}$$

4.

On a :

$$\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1}-a_k) = \sum_{k=1}^{M}(ka_{k-1}-ka_k) = \sum_{k=1}^{M}((k-1)a_{k-1}+a_{k-1}-ka_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{M}((k-1)a_{k-1}-ka_k)+\sum_{k=1}^{M} a_{k-1} = 0\times a_0 - Ma_M + \sum_{k=1}^{M} a_{k-1} \text{ (somme télescopique)}$$
$$= \boxed{\sum_{k=0}^{M-1} a_k - Ma_M.} \text{ (changement d'indice)}$$

5.

L'espérance de Y existe puisque $Y(\Omega)$ est fini.
On a :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{b+1} kP(Y=k) = \sum_{k=1}^{b} k\left(\frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k}\right) + (b+1)P(Y=b+1).$$

La somme obtenue est de la forme $\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1}-a_k)$ avec $M=b$ et $a_k = \frac{b!}{(b-k)!N^k}$. On a donc :

$$\boxed{E(Y) = \sum_{k=0}^{b-1}\frac{b!}{(b-k)!N^k} - b\frac{b!}{(b-b)!N^b} + (b+1)\frac{b!}{N^b} = \sum_{k=0}^{b-1}\frac{b!}{(b-k)!N^k} + \frac{b!}{N^b} = \sum_{k=0}^{b}\frac{b!}{(b-k)!N^k}.}$$

Partie II

1.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour $n=0$, on a :$p_{n,0}=p_{0,0}=P(X_0=0)=1$ et $p_{n,n}=p_{0,0}=1$. Pour $n\neq 0$, on a : $p_{n,0}=P(X_n=0)=P(B_1\cap\dots\cap B_n)$ où pour tout i, $B_i=\overline{N_i}$. Or d'après la formule des probabilités composées :

$$P(B_1\cap\dots\cap B_n) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)\times\dots\times P_{B_1\cap\dots\cap B_{n-1}}(B_{n-1}) = \frac{a}{N}\times\dots\times\frac{a}{N}$$

et donc : $\boxed{p_{n,0}=\left(\frac{a}{N}\right)^n}$. On constate d'ailleurs que la formule est également valable pour $n=0$.
Toujours pour $n\neq 0$, on a de manière similaire $p_{n,n}=P(X_n=n)=P(N_1\cap\dots\cap N_n)$. Et donc si $n\leq b$:

$$\boxed{p_{n,n} = P(N_1)P_{N_1}(N_2)\times\dots\times P_{N_1\cap\dots\cap N_{n-1}}(N_{n-1}) = \frac{b}{N}\times\frac{b-1}{N}\times\dots\times\frac{b-(n-1)}{N} = \frac{b!}{(b-n)!N^n}.}$$

On remarque encore une fois que la formule est valide dans le cas $n=0$. Si en revanche, $n>b$, alors $P_{N_1\cap\dots\cap N_b}(N_{b+1})=0$ et donc $\boxed{p_{n,n}=0}$. En outre, on a :$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} P(X_n=k)$. Or les $[X_n=k]$ forment un système complet d'événements. Donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = 1.}$$

2.

Pour tous $k, n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$[X_n = k] = ([X_{n-1} = k-1] \cap N_n) \cup ([X_{n-1} = k] \cap B_n).$$

En effet, pour avoir k boules noires au $n^{\text{ème}}$ tirage, il faut soit en tirer $k-1$ au $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage puis tirer une boule noire, soit en avoir déjà k au $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage et ne pas en rajouter (c'est-à-dire tirer une boule blanche) au dernier tirage.
Les événements $[X_{n-1} = k-1]$ et $[X_{n-1} = k]$ sont incompatibles et donc les événements $[X_{n-1} = k-1] \cap N_n$ et $[X_{n-1} = k] \cap B_n$ le sont aussi. Ainsi :

$$P(X_n = k) = P([X_{n-1} = k-1] \cap N_n) + P([X_{n-1} = k] \cap B_n).$$

D'où d'après la formule des probabilités composées :

$$p_{n,k} = P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k-1)P_{[X_{n-1}=k-1]}(N_n) + P(X_{n-1} = k)P_{[X_{n-1}=k]}(B_n).$$

Or :

$$P_{[X_{n-1}=k-1]}(N_n) = \frac{b-(k-1)}{N} \quad \text{et} \quad P_{[X_{n-1}=k]}(B_n) = \frac{a+k}{N}.$$

Donc en multipliant tout par N et en réordonnant les termes :

$$\boxed{N \cdot p_{n,k} = (a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1}.}$$

3. (a)

Comme $X_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ est fini, X_n admet une espérance. On a donc :

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n} kp_{n,k}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
N \cdot E(X_n) &= \sum_{k=1}^{n} kNp_{n,k} \\
&\quad \text{(car le premier terme est nul)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k((a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1}) \\
&\quad \text{(formule } (\mathcal{A})) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=1}^{n} k(b+1-k)p_{n-1,k-1} \\
&\quad \text{(car } p_{n-1,n} = 0 \text{ car } n > n-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(b+1-(k+1))p_{n-1,k}. \\
&\quad \text{(changement d'indice)}
\end{aligned}$$

Puis on réunit les sommes en séparant les termes qui se distinguent :

$$N \cdot E(X_n) = \sum_{k=1}^{n-1} (ka + k^2 + (k+1)(b-k))p_{n-1,k} + bp_{n-1,0} = \sum_{k=1}^{n-1} (kN + b - k)p_{n-1,k} + bp_{n-1,0}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (b + k(N-1))p_{n-1,k} + bp_{n-1,0} \boxed{= \sum_{k=0}^{n-1} (b + k(N-1))p_{n-1,k}.}$$

On en déduit :

$$N \cdot E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} bP(X_{n-1}=k) + \sum_{k=0}^{n-1} k(N-1)P(X_{n-1}=k)$$
$$= b\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1}=k)}_{=1} + (N-1)\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} kP(X_{n-1}=k)}_{=E(X_{n-1})} = b+(N-1)E(X_{n-1}).$$

D'où :

$$\boxed{E(X_n) = \frac{1}{N}\left(b+(N-1)E(X_{n-1})\right) = \left(1-\frac{1}{N}\right)E(X_{n-1}) + \frac{b}{N}.}$$

(b)

Comme $E(X_0) = 0$, on en déduit que l'on peut calculer les espérances des X_n de proche en proche. Ainsi la fonction `Python` suivante permet de calculer $E(X_{2009})$:

```python
def esperance():
  b = 10
  N = 100
  E = 0
  for i in range(1,2009+1):
    E = (1-1/N)*E + b/N
  return E
```

(c)

Si on pose $u_n = E(X_n)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \left(1-\frac{1}{N}\right)u_{n-1} + \frac{b}{N}$. Et ainsi, (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

Cherchons à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue X $X = \left(1-\frac{1}{N}\right)X + \frac{b}{N}$. On a pour tout $X \in \mathbb{R}$:

$$X = \left(1-\frac{1}{N}\right)X + \frac{b}{N} \Leftrightarrow X = X - \frac{X}{N} + \frac{b}{N} \Leftrightarrow 0 = -X + b \Leftrightarrow X = b.$$

Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - b$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$v_n = u_n - b = \left(1-\frac{1}{N}\right)u_{n-1} + \frac{b}{N} - b = \left(1-\frac{1}{N}\right)(v_{n-1}+b) + \frac{b}{N} - b = \left(1-\frac{1}{N}\right)v_{n-1}.$$

Ainsi (v_n) est géométrique et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$. D'où : $u_n = b + (u_0 - b)\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$. Or $u_0 = E(X_0) = 0$. Donc :

$$\boxed{E(X_n) = b - b\left(1-\frac{1}{N}\right)^n = b\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right].}$$

4. (a)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les événements $[X_n = k]$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$N \cdot q_{n+1} = NP(N_{n+1}) = N\sum_{k=0}^{n} P(X_n=k)P_{[X_n=k]}(N_{n+1}).$$

Or comme dans les questions précédentes : $P_{[X_n=k]}(N_{n+1}) = \frac{b-k}{N}$. Donc :

$$\boxed{N \cdot q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (b-k)p_{n,k}.}$$

(b)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{q_{n+1} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n}(b-k)p_{n,k} = \frac{b}{N}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}}_{=1} - \frac{1}{N}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} kp_{n,k}}_{=E(X_n)} = \frac{b-E(X_n)}{N}.}$$

Et ainsi :

$$\boxed{q_{n+1} = \frac{b - b\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]}{N} = \frac{b}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n.}$$

5. (a)

Comme $X_n(\Omega)$ est fini, $(X_n(X_n-1))(\Omega)$ est également fini. Donc $X_n(X_n-1)$ admet une espérance. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le théorème de transfert :

$$Nu_n = NE(X_n(X_n-1)) = N\sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X_n = k) = N\sum_{k=0}^{n} k(k-1)p_{n,k}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
Nu_n &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(N \cdot p_{n,k}) \\
&\quad \text{(premier terme nul)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)((a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1}) \\
&\quad \text{(formule } (\mathcal{A})\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(b+1-k)p_{n-1,k-1} \\
&\quad \text{(dernier terme nul et séparation des sommes)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)k(b+1-(k+1))p_{n-1,k}. \\
&\quad \text{(changement d'indice)}
\end{aligned}$$

Puis en rassemblant les sommes et en omettant le terme nul :

$$\begin{aligned}
Nu_n &= \sum_{k=1}^{n-1}(k(k-1)(a+k)+(k+1)k(b-k))p_{n-1,k}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(k(k-1)a+bk(k-1)+2b+k^2(k-1)-k^2(k+1)))p_{n-1,k}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(k(k-1)(a+b)+2bk-2k^2)p_{n-1,k}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(k(k-1)(a+b-2)+2k(k-1)+2bk-2k^2)p_{n-1,k}\\
&= \boxed{\sum_{k=1}^{n-1}(k(k-1)(a+b-2)+2(b-1)k)p_{n-1,k}.}
\end{aligned}$$

(b)

On a pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
Nu_n &= \sum_{k=1}^{n-1}(k(k-1)(a+b-2)+2(b-1)k)p_{n-1,k}\\
&= (a+b-2)\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}k(k-1)p_{n-1,k}}_{=E(X_{n-1}(X_{n-1}-1))}+2(b-1)\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}kp_{n-1,k}}_{=E(X_{n-1})}\\
&= (N-2)u_{n-1}+2(b-1)b\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right]
\end{aligned}$$

Puis en divisant par N, on a bien :

$$\boxed{u_n = \left(1-\frac{2}{N}\right)u_{n-1}+\frac{2b(b-1)}{N}\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right].}$$

(c)

Montrons la formule par récurrence.

- **Initialisation :** Pour $n=0$, on a :

$$u_0 = E(X_0(X_0-1)) = E(0\times(0-1)) = 0.$$

Et :

$$b(b-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^0-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^0\right] = b(b-1)(1+1-2) = 0.$$

On a bien :

$$\boxed{u_0 = b(b-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^0-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^0\right].}$$

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose :

$$u_n = b(b-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right].$$

Montrons que :

$$u_{n+1}=b(b-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n+1}-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+1}\right].$$

On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \left(1-\frac{2}{N}\right)u_{(n+1)-1}+\frac{2b(b-1)}{N}\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{(n+1)-1}\right]\\
&= \left(1-\frac{2}{N}\right)b(b-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n}-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}\right]+\frac{2b(b-1)}{N}\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}\right]\\
&= b(b-1)\left[\left(1-\frac{2}{N}\right)+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n+1}-2\left(1-\frac{2}{N}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}+\frac{2}{N}-\frac{2}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}\right]\\
&= b(b-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n+1}-2\left(1-\frac{2}{N}+\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}\right]\\
&= b(b-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n+1}-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+1}\right].
\end{aligned}$$

La formule est bien héréditaire.

Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, on a donc bien, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{u_n=b(b-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n}-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}\right].}$$

(d)

X_n^2 admet une espérance puisque X_n a un nombre fini de valeurs. Donc X_n admet un moment d'ordre 2 et ainsi admet une variance.
De plus, d'après la formule du Huygens, on a :

$$\begin{aligned}
V(X_n) &= E(X_n^2)-E(X_n)^2\\
&= E(X_n(X_n-1)+X_n)-E(X_n)^2\\
&= E(X_n(X_n-1))+E(X_n)-E(X_n)^2\\
&= \boxed{b(b-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n}-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}\right]+b\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}\right]-b^2\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}\right]^2},
\end{aligned}$$

expression qui ne semble pas avoir de simplification évidente.
Pour $N\geq 2$ fixé, on a $1-\frac{1}{N}$ et $1-\frac{2}{N}$ dans $[0,1[$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n}=0.$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}V(X_n)=b(b-1)+b-b^2=0.}$$