CONCOURS BLANC 2

Mardi 05/03/2024 - 4h

Calculatrice interdite

1. Les exercices sont indépendants.
2. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
3. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
4. Encadrez ou soulignez vos résultats.

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques **Python** *sont importées comme suit :*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - Ecricome ECS 2017

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout élément $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On rappelle que si x est ainsi associé à X et y à Y, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^tXY = {}^tYX,$$

où ${}^tX$ représente la transposée de X.

1. On note J la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
   (a) Justifier qu'il existe une matrice P de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
   $$J = PD^tP.$$
   (b) Déterminer le rang de J. En déduire une valeur propre de J ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.
   (c) En examinant la trace de J, expliciter la matrice D.
2. On note f la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :
   $$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j.$$
   (a) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
   $$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right].$$
   (b) Déterminer une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = {}^tXMX.$$

(c) Exprimer M comme combinaison linéaire de J et I, où I désigne la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(d) En déduire qu'il existe une matrice diagonale Δ à déterminer telle que :

$$M = P\Delta\,{}^tP.$$

(e) Montrer que la fonction f admet un minimum et un maximum sur l'ensemble :

$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

et déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de f sur $\mathcal{S}$.

3. Dans cette question, A est une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ qui est symétrique et dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Justifier que A est diagonalisable et montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $B^2 = A$.

   On note v l'endomorphisme dont B est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

   (b) À l'aide de v et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ (\langle x, y\rangle)^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \times \langle u^{-1}(y), y\rangle.$$

   Pour un $x \in \mathbb{R}^n$ non nul donnée, trouver un $y \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que cette inégalité soit une égalité.

   (c) En déduire que :

$$\inf_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ \|x\|=1}} (\langle u(x), x\rangle) \times (\langle u^{-1}(x), x\rangle) = 1.$$

4. On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

   (b) Montrer que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

   (c) En déduire le minimum de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x_1, x_2) = (x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2)(2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)$$

   sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Exercice 2 - EDHEC ECS 2020 (adapté)

Soit f la fonction définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = x\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le seul point critique A de f.
3. (a) Calculer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de f en A.

   (b) Former la hessienne de f au point A et vérifier qu'elle est diagonale. Montrer que f présente un minimum local en A. Préciser la valeur de ce minimum.
4. (a) Montrer que, pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) \geqslant x\mathrm{e}^x$.

   (b) Que peut-on en déduire pour le minimum de f trouvé à la question 3b ?
5. On souhaite étudier les extrema de f sous la contrainte linéaire (C) : $\begin{cases} x &= 1 \\ y+z &= 0 \end{cases}$. Montrer que, sous la contrainte (C), f présente un minimum global au point $(1, 0, 0)$. Quelle est sa valeur ?
6. On souhaite maintenant étudier les extrema de f sous la contrainte (C') : $x(y^2 + z^2 + 1) = 1$.

   (a) Après avoir justifié que $y^2 + z^2 + 1 \neq 0$, étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(y, z) = \frac{\mathrm{e}}{1 + y^2 + z^2}.$$

   Montrer que g atteint un maximum global et indiquer sa valeur et en quel point il est atteint.

(b) En déduire que f possède un maximum global sous la contrainte (C'). En quel point est-il atteint ? Quelle est sa valeur ?

Exercice 3 - EDHEC ECS 2021

On considère un espace euclidien E pour lequel le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x, y\rangle$, tandis que la norme du vecteur x est notée $\|x\|$. Le vecteur nul de E est noté 0_E.
On considère aussi un endomorphisme f de E, différent de l'endomorphisme nul, et antisymétrique, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle.$$

1. Montrer que : $\forall x \in E$, $\langle f(x), x\rangle = 0$.
2. Établir l'égalite : $\mathrm{Ker}(f)\oplus \mathrm{Im}(f) = E$.
3. On pose $s = f\circ f$. Montrer que s est un endomorphisme symétrique de E et que ses valeurs propres sont toutes dans $\mathbb{R}_-$.
4. On note g l'application qui à tout vecteur x de $\mathrm{Im}(f)$ associe $g(x) = f(x)$ et on pose $t = g\circ g$.
   (a) Montrer que g est un endomorphisme antisymétrique de $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) En déduire que les valeurs propres de t sont toutes dans $\mathbb{R}_-^\star$.

Dans les deux questions suivantes, on considère une valeur propre λ de t et on note $E_\lambda(t)$ le sous-espace propre associé à cette valeur propre.

5. On considère un vecteur e_1 non nul de $E_\lambda(t)$.
   (a) Montrer que $(e_1, g(e_1))$ est une famille d'éléments de $E_\lambda(t)$, orthogonale et libre.
   (b) En déduire, en considérant l'orthogonal F_2 de $\mathrm{Vect}(e_1, g(e_1))$ dans $E_\lambda(t)$, que la dimension de $E_\lambda(t)$ est paire et qu'il existe un entier naturel p non nul, ainsi que p vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$ de $E_\lambda(t)$, tels que $(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), \dots, e_p, g(e_p))$ soit une base orthogonale de $E_\lambda(t)$.
6. Soit k un entier de $[\![1,p]\!]$.
   (a) Montrer que l'on a : $\|g(e_k)\|^2 = -\lambda\|e_k\|^2$.
   (b) On considère les vecteurs $e'_k = \frac{1}{\|e_k\|}e_k$ et $e''_k = \frac{1}{\|g(e_k)\|}g(e_k)$.
   Établir que $g(e'_k) = \sqrt{-\lambda}e''_k$ et $g(e''_k) = -\sqrt{-\lambda}e'_k$.
7. (a) Montrer que le rang de f est pair.
   (b) On pose $r = \frac{1}{2}\mathrm{rg}(f)$. Déduire des questions précédentes qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et r réels a_1, ..., a_r strictement positifs, pas nécessairement distincts, tels que la matrice M de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & (0) & & \\ & & 0 & -a_2 & & & & & \\ & & a_2 & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & -a_r & & \\ & & & & & a_r & 0 & & \\ & & (0) & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & (0) & \\ & & 0 & -a_2 & & & \\ & & a_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & (0) & & & 0 & -a_r \\ & & & & & a_r & 0 \end{pmatrix}.$$

Problème 4 - Ecricome ECS 2021

Soit a un réel strictement positif.
On considère dans toute la suite du problème une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellemnet indépendantes et identiquement distribuées, toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0, a]$.

L'objectif de ce problème est d'étudier puis de comparer deux estimateurs de a.
Les parties I et II de ce problème sont indépendantes.

Partie I - Estimateur du maximum de vraisemblance.
On note pour tout $n \geqslant 1$, $V_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, appelé *estimateur de a du maximum de vraisemblance.*

1. (a) On rappelle qu'avec `numpy`, l'instruction `rd.random(n)` renvoie un tableau à n colonnes où chaque coefficients simule une loi uniforme sur $[0, 1]$.
   Écrire une fonction d'en-tête `def uniforme(a,b,n):` prenant en entrée deux réels a et b avec $a < b$ et un entier naturel non nul $n$et qui renvoie un tableau `numpy` dont les coefficients simulent la loi uniforme $[a, b]$.
   (b) En utilisant la fonction précédente, écrire une fonction d'en-tête `def sim_V(n,a):` prenant en entrée un entier naturel non nul n et un réel a strictement positif, et qui renvoie une réalisation de V_n.
   (c) On a tracé en figure 1 cinq réalisations mutuellement indépendantes de $(V_1, V_2, \ldots, V_{100})$, dans le cas où $a = 1$. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer sur l'estimateur V_n ?

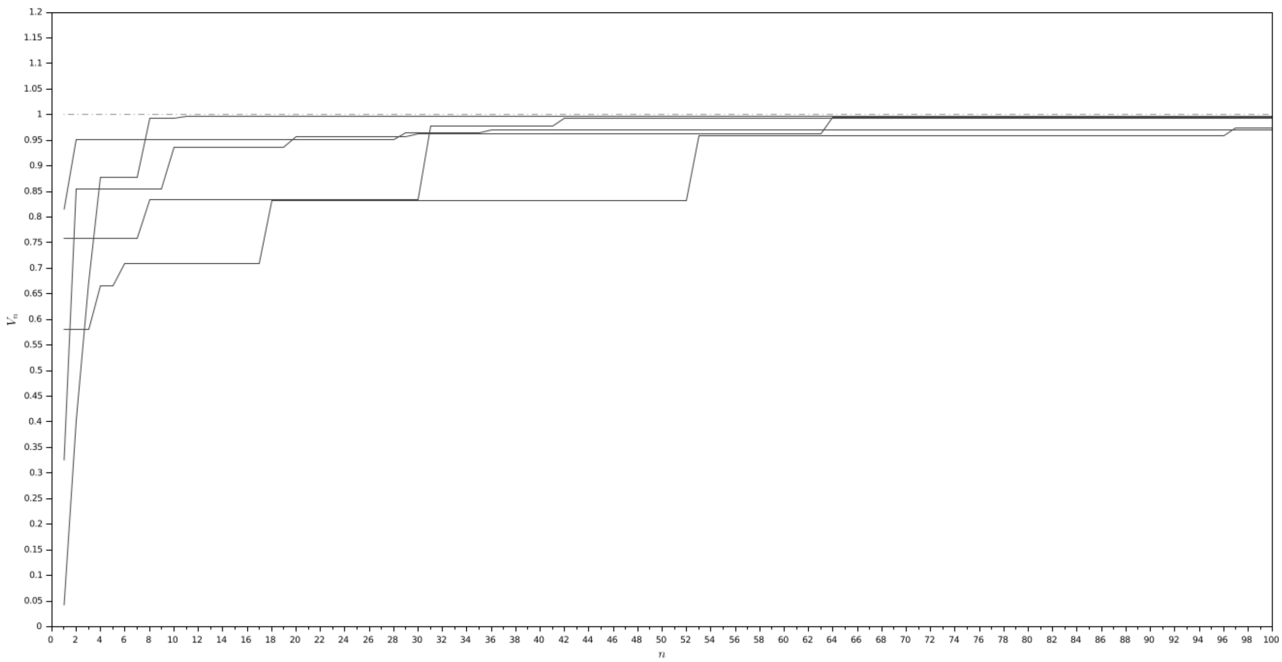

Figure 1 – Cinq évolutions de $(V_1, V_2, \ldots, V_{100})$ pour $a = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) Rappeler l'expression de la fonction de répartition de X_1, suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0, a])$.
   (b) Déterminer la fonction de répartition F_n de V_n.
   (c) En déduire que V_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de V_n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Justifier que V_n admet une espérance et déterminer l'espérance de V_n. L'estimateur de V_n est-il sans biais ?
4. Soit $\epsilon > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer $\mathbb{P}(|V_n - a| \geqslant \epsilon)$ en fonction de F_n, de a et de ϵ.
   L'estimateur V_n est-il convergent ?
5. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout réel t, exprimer $\mathbb{P}(n(a - V_n) \leqslant t)$ à l'aide de F_n.
   En déduire que la suite $(n(a - V_n))_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on identifiera la loi et son(ses) paramètre(s).
6. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Déterminer à partir de la question précédente un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance $1 - \alpha$ pour le paramètre a, construit à l'aide de V_n.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) Montrer que V_n admet un moment d'ordre 2, que l'on déterminera.
   (b) Montrer que $\mathbb{E}((V_n - a)^2)$ vaut $\frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}$.
   Quel résultat précédemment établi cela permet-il de retrouver ?

On pourra appliquer l'inégalité de Markov.

Partie II - Méthode des moments.
Pour un entier $n \geqslant 1$, on note $\overline{X}_n$ la moyenne empirique de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire :

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

On note $M_n = 2\overline{X}_n$, appelé *estimateur de a par la méthode des moments.*

8. Écrire une fonction d'en-tête `def sim_M(n,a):` qui, prenant en entrée un entier naturel non nul n et le réel $a > 0$, renvoie une réalisation de la variable aléatoire M_n.
9. Déterminer l'espérance et la variance de $\overline{X}_n$. En déduire que M_n est un estimateur sans biais.
10. Calculer $V(M_n)$. M_n est-il un estimateur convergent ?
11. Justifier que la suite $(\sqrt{n}(M_n - a))_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi et le(s) paramètre(s).
12. Soit $\alpha \in]0, 1[$.
    Déduire de la question précédente un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance $1 - \alpha$ pour le paramètre a, construit sur M_n.
    Quel intervalle de confiance vous semble meilleur entre ce dernier et celui déterminé à la question 6 ?
13. Calculer $\mathbb{E}((M_n - a)^2)$. Comparer au résultat obtenu à la question 7b.
    Commenter ce résultat à l'aide de la figure 2.

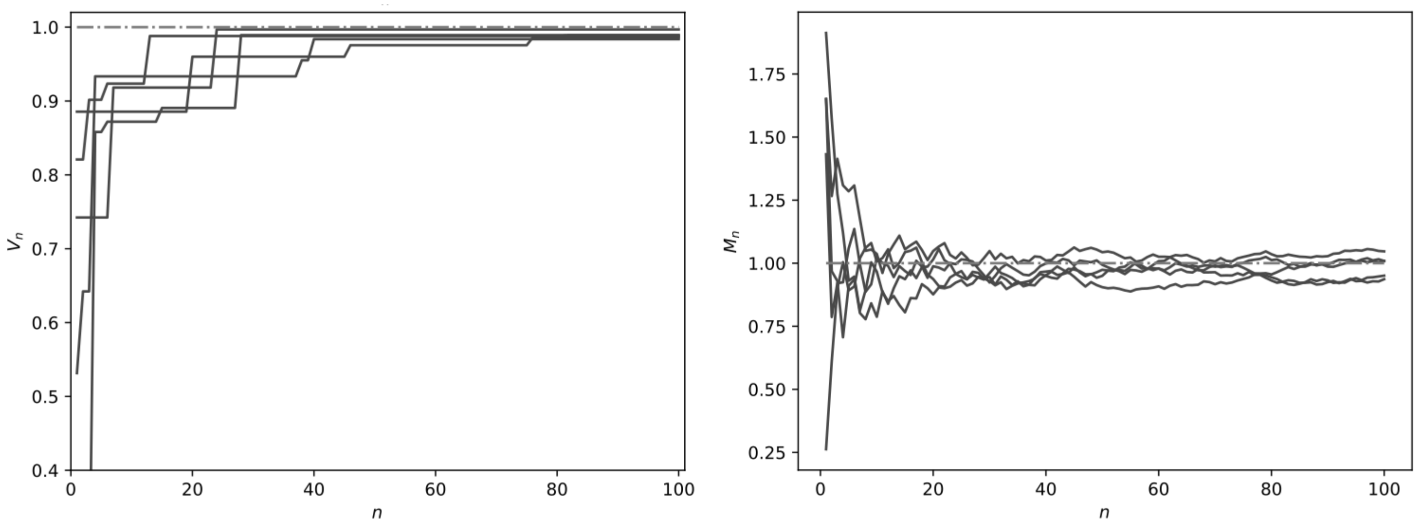

FIGURE 2 – Cinq évolutions de $(V_1, V_2, \ldots, V_{100})$ (à gauche) et de $(M_1, M_2, \ldots, M_{100})$ (à droite) pour $a = 1$.

Partie III - Consistance de ces estimateurs.
Dans les parties précédentes, nous avons montré que (V_n) convergeait « plus vite » vers a que (M_n). Nous allons maintenant étudier la sensibilité de ces estimateurs à une perturbation, en supposant que la première mesure (X_1) est erronée.
Nous supposons donc toujours que les variables aléatoires X_i sont mutuellement indépendantes, mais nous supposons maintenant que :

- X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 2a]$;
- si $i \geqslant 2$, X_i suit la loi uniforme sur $[0, a]$ (comme précédemment).

On considère toujours, pour tout entier $n \geqslant 1$: $V_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $M_n = 2\overline{X}_n = \frac{2}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

14. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout réel t de $]a, 2a]$, montrer que : $\mathbb{P}(V_n \leqslant t) = \frac{t}{2a}$.
    (b) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer la fonction de répartition de V_n.
    La suite de variables aléatoires $(V_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle en loi ?
    (c) Calculer $\mathbb{P}\left(V_n > \frac{3}{2}a\right)$.
    L'estimateur V_n est-il toujours convergent ?

15. On pose pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $M'_n = \frac{2}{n-1}(X_2 + \cdots + X_n)$.
On rappelle que la suite $(M'_n)_{n\geqslant 2}$ converge en probabilité vers a.
   (a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, exprimer M_n en fonction de X_1, M'_n et n.
   (b) En déduire que pour tout entier natiurel n supérieur ou égal à 2 :
$$|M_n - a| \leqslant \frac{3a}{n} + |M'_n - a|.$$
   (c) Soit $\epsilon > 0$ et soit n_0 un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que $\frac{3a}{n_0} < \epsilon$.
Pour tout entier n vérifiant $n \geqslant n_0$, comparer les événements $\Big[|M'_n - a| < \epsilon\Big]$ et $\Big[|M_n - a| < 2\epsilon\Big]$.
   (d) La suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\geqslant 2}$ converge-t-elle en probabilité vers a ?
16. Commenter les résultats de cette partie à partir des parties précédentes.