

CORRECTION CONCOURS BLANC 2

Exercice 1 - Ecricome ECS 2017

1. (a) On a $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique. Elle est donc diagonalisable en base orthonormée.

Ainsi il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que :

$$J = PDP^{-1}$$

où P est la matrice de passage de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base orthonormée de diagonalisation de J .

Puisque la base canonique est orthonormée, la matrice P est une matrice orthogonale et donc $P^{-1} = {}^tP$.

D'où :

$$J = PDP^{-1}.$$

- (b) Les colonnes de J sont toutes multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\text{rg}J \leq 1$ et comme $J \neq 0$, on a $\text{rg}J = 1$.

Ainsi $\text{rg}(J - 0 \times I) = 1 < n$ et donc $0 \in \text{Sp}(J)$.

De plus, on a :

$$\dim E_0(J) = n - \text{rg}(J - 0 \times I) = n - 1.$$

- (c) On a $\text{Tr}(J) = n$. Or :

$$\text{Tr}(J) = \text{Tr}(PDP^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}PD) = \text{Tr}(D).$$

Or, à l'ordre des coefficients diagonaux près, on a :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

puisque $\dim E_0(J) = n - 1$ et où $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a donc $\text{Tr}(D) = \lambda$ et ainsi, toujours à l'ordre des coefficients diagonaux près :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & n \end{pmatrix}.$$

2. (a) Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k^2 \right] &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) - \sum_{k=1}^n x_k^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j - \sum_{k=1}^n x_k^2 \right] \\
 &\quad \text{(on écrit sous forme de double somme)} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_i x_j + \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{k=1}^n x_k^2 \right] \\
 &\quad \text{(on sépare les termes } i = j \text{)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j + \sum_{j=i+1}^n x_i x_j \right] \\
 &\quad \text{(on sépare } j < i \text{ et } j > i \text{)} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i x_j \right] \\
 &\quad \text{(on distribue la somme extérieure et on retire les termes inexistant)} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n x_i x_j + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i x_j \right] \\
 &\quad \text{(on permute les deux premières sommes)} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i'=1}^{n-1} \sum_{j'=i'+1}^n x_{j'} x_{i'} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i x_j \right] \\
 &\quad \text{(changement d'indice)} \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i x_j = \boxed{\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j}.
 \end{aligned}$$

(b) On pose $M = (m_{ij})$. Avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $(MX)_i = \sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j$ puis :

$${}^t X M X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} x_i x_j.$$

D'autre part, on a :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j - \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$$

où $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,j} = 0$ si $i = j$.

Ainsi, une solution possible pour M est :

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque : la solution n'est pas unique. En revanche, on sait du cours sur les formes quadratiques qu'il est préférable de prendre M symétrique. Dans ce contexte, il y a bien unicité (mais ce n'est pas demandé par l'énoncé et il faudrait le prouver).

(c) Clairement, on a $M = \frac{1}{2}(J - I)$.

(d) On a alors :

$$M = \frac{1}{2}(J - I) = \frac{1}{2}(PD^tP - PI^tP) = P\left(\frac{1}{2}(D - I)\right)^tP.$$

En posant $\Delta = \frac{1}{2}(D - I)$, on a bien :

$$M = P\Delta^tP.$$

(e) \mathcal{S} est fermé borné. Donc comme f est continue (car polynomiale),

elle admet nécessairement un minimum et un maximum (globaux) sur \mathcal{S} . Il reste à les déterminer.

Pour $x \in \mathcal{S}$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Méthode 1 : (par tâtonnement)

Ainsi, on a nécessairement : $f(x) \geq -\frac{1}{2}$. Et il est facile de vérifier que pour $x = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, \dots, 0)$, on a :

$$f(x) = -\frac{1}{2}.$$

Donc f atteint son minimum de $-\frac{1}{2}$.

D'après la formule $f(x) = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n x_i)^2 - \frac{1}{2}$ le maximum est atteint lorsque $|\sum_{i=1}^n x_i|$ est maximal.

Or $\sum_{i=1}^n x_i = \langle (x_1, \dots, x_n), (1, \dots, 1) \rangle$. Donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i\right| \leq \|x\| \underbrace{\|(1, \dots, 1)\|}_{=\sqrt{n}}$$

et c'est une égalité pour x et $(1, \dots, 1)$ colinéaire.

Donc f atteint son maximum par exemple en $x = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)$. On a alors :

$$f(x) = \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}.$$

Méthode 2 : (visiblement attendue par l'énoncé)

On sait que $\Delta = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & & \\ & \ddots & & \\ & & -\frac{1}{2} & \\ & & & \frac{n-1}{2} \end{pmatrix}$. Posons $Y = {}^tPX$. On a alors $f(x) = {}^tXP\Delta^tX = {}^tY\Delta Y$.

Avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ cela donne $f(x) = -\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \dots - \frac{1}{2}y_{n-1}^2 + \frac{n-1}{2}y_n^2$.

Comme $\frac{n-1}{2} \geq -\frac{1}{2}$ et $y_n^2 \geq 0$, on a :

$$f(x) \geq -\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \dots - \frac{1}{2}y_{n-1}^2 - \frac{1}{2}y_n^2 \geq \frac{1}{2}(y_1^2 + \dots + y_n^2).$$

Or $y_1^2 + \dots + y_n^2 = {}^tYY = {}^tXP^tPX = {}^tXX = \|x\|^2$. Et donc sur \mathcal{S} , on a :

$$f(x) \geq -\frac{1}{2}.$$

On a de manière similaire :

$$f(x) \leq \frac{n-1}{2}.$$

pour $x \in \mathcal{S}$.

Mais on remarque surtout en particulier que $f(x) = -\frac{1}{2}$ si $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f(x) = \frac{n-1}{2}$ si $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Or on a $Y = {}^tPX \Leftrightarrow X = PY$. Donc f atteint son minimum $-\frac{1}{2}$ en prenant la première colonne de P pour X et son maximum $\frac{n-1}{2}$ en prenant la dernière colonne de P pour X .

3. (a) A est symétrique donc orthodiagonalisable.

Écrivons :

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tQ$$

où $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A . On a donc $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$. Posons :

$$B = Q \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tQ.$$

On a bien :

$$\begin{aligned} B^2 &= Q \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tQ Q \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 1 \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tQ = Q \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tQ \\ &= Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tQ = A. \end{aligned}$$

et :

$${}^tB = {}^t({}^tQ) {}^t \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tQ = Q \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tQ = B.$$

(b) Les valeurs propres de A sont les λ_i strictement positif. Donc $0 \notin \text{Sp}(A)$ et donc A est inversible.

De même les valeurs propres de B sont les $\sqrt{\lambda_i}$ et donc $0 \notin \text{Sp}(B)$ et B est inversible.

Donc u^{-1} et v^{-1} existent.

On a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$(\langle v(x), v^{-1}(y) \rangle)^2 \leq \langle v(x), v(x) \rangle \langle v^{-1}(y), v^{-1}(y) \rangle.$$

Puis remarquons que B est la matrice de v dans une base orthonormée, donc v est symétrique. Remarquons que ${}^t(B^{-1}) = ({}^tB)^{-1} = B^{-1}$ et donc B^{-1} est symétrique. Ainsi v^{-1} est symétrique. On a donc :

$$\langle v(x), v^{-1}(y) \rangle \underset{v \text{ symétrique}}{=} \langle x, v(v^{-1}(y)) \rangle = \langle x, y \rangle$$

et :

$$\langle v(x), v(x) \rangle \underset{v \text{ symétrique}}{=} \langle v^2(x), x \rangle = \langle u(x), x \rangle$$

et enfin :

$$\langle v^{-1}(y), v^{-1}(y) \rangle \underset{v^{-1} \text{ symétrique}}{=} \langle v^{-2}(y), y \rangle = \langle u^{-1}(y), y \rangle.$$

Donc :

$$\langle \langle x, y \rangle \rangle^2 \leq \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(y), y \rangle.$$

De plus, si $y = u(x)$, on a :

$$\langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(y), y \rangle = \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(u(x)), u(x) \rangle = \langle u(x), x \rangle \langle x, u(x) \rangle = \langle \langle x, u(x) \rangle \rangle^2 = \langle \langle x, y \rangle \rangle^2.$$

(c) En appliquant l'inégalité précédente à $y = x$, on a :

$$\langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle \geq \langle \langle x, x \rangle \rangle^2.$$

Sous la contrainte $\|x\| = 1$, on a donc :

$$\langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle \geq 1.$$

Donc 1 est un minorant de $\langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ avec $\|x\| = 1$.

Il reste à montrer que cette borne est atteinte.

Soit x un vecteur propre unitaire de u . Notons $u(x) = \lambda x$ (avec $\lambda > 0$). On a donc $u^{-1}(\lambda x) = x$ et ainsi $u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x$ par linéarité.

Comme x est unitaire, on a $\|x\| = 1$. Puis :

$$\langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle \langle \frac{1}{\lambda}x, x \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle \langle x, x \rangle \rangle^2 = 1.$$

Donc, on a bien :

$$\inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} (\langle u(x), x \rangle) \times (\langle u^{-1}(x), x \rangle) = 1.$$

et cette borne inférieure est en fait un minimum.

4. (a) Essayons une méthode un peu différente de d'habitude.

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 3A - I$. On en déduit $3A - A^2 = I$ puis :

$$A(3I - A) = I \text{ et } (3I - A)A = I$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = 3I - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) On vient de voir que $X^2 - 3X + 1$ est annulateur de A . Le discriminant de $X^2 - 3X + 1$ est :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5.$$

Donc les racines sont :

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Or $3 = \sqrt{9} > \sqrt{5}$ par stricte croissance de la racine. Donc $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

On a donc :

$$\text{Sp}(A) \subset \{\lambda_1, \lambda_2\} \subset \mathbb{R}_+^*.$$

(c) g est exactement de la forme $(\langle u(x), x \rangle) \times (\langle u^{-1}(x), x \rangle)$ avec u l'endomorphisme de matrice A et la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$ est équivalente à $\|x\| = 1$.

En effet :

$$\langle u(x), x \rangle = {}^t(AX)X = {}^tX^tAX = {}^tXAX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2.$$

où X est la matrice de x . Et de même :

$$\langle u^{-1}(x), x \rangle = {}^t(A^{-1}X)X = {}^tX^t(A^{-1})X = {}^tXA^{-1}X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2.$$

Donc puisque A est symétrique et que toutes ses valeurs propres sont strictement positives, on a d'après la question précédente que le minimum de g sur la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$ est 1.

Exercice 2 - EDHEC ECS 2020 (adapté)

1. La fonction $(x, y, z) \mapsto x(y^2 + z^2 + 1)$ définie sur \mathbb{R}^3 et à valeurs dans \mathbb{R} est polynomiale donc \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .
La fonction \exp est \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . Donc par composition :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto e^{x(y^2+z^2+1)} \end{cases}$$

est \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^3 .

La fonction $(x, y, z) \mapsto x$ est \mathcal{C}^2 (c'est une fonction coordonnée). Donc par produit f est \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^3 .

2. f est \mathcal{C}^2 donc admet des dérivées partielles. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \text{ pt critique de } f &\Leftrightarrow \nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1 f(x, y, z) = 0 \\ \partial_2 f(x, y, z) = 0 \\ \partial_3 f(x, y, z) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + (y^2 + z^2 + 1)x)e^{x(y^2+z^2+1)} = 0 \\ 2x^2ye^{x(y^2+z^2+1)} = 0 \\ 2x^2ze^{x(y^2+z^2+1)} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + (y^2 + z^2 + 1)x = 0 \\ x^2y = 0 \\ x^2z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La première équation implique $x \neq 0$ (sinon on a $1 = 0$). Donc :

$$(x, y, z) \text{ pt critique de } f \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + (y^2 + z^2 + 1)x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2y = 0 \\ x^2z = 0 \end{cases}$$

Donc l'unique point critique de f est $(-1, 0, 0)$.

3. (a) f est \mathcal{C}^2 donc admet des dérivées partielles d'ordre 2.

De plus, comme f est \mathcal{C}^2 , le théorème de Schwarz s'applique et on a pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \partial_{1,2}f(x, y, z) &= \partial_{2,1}f(x, y, z), \\ \partial_{1,3}f(x, y, z) &= \partial_{3,1}f(x, y, z), \\ \partial_{2,3}f(x, y, z) &= \partial_{3,2}f(x, y, z). \end{aligned}$$

Calculons les 6 dérivées secondes indépendantes :

$$\begin{aligned} \partial_{1,1}f(x, y, z) &= (y^2 + z^2 + 1)e^{x(y^2+z^2+1)} + (1 + (y^2 + z^2 + 1)x)(y^2 + z^2 + 1)e^{x(y^2+z^2+1)} \\ &= (2 + (y^2 + z^2 + 1))(y^2 + z^2 + 1)e^{x(y^2+z^2+1)}, \end{aligned}$$

$$\partial_{1,2}f(x, y, z) = 4xye^{x(y^2+z^2+1)} + 2x^2y(y^2 + z^2 + 1)e^{x(y^2+z^2+1)} = 2xy(2 + x(y^2 + z^2 + 1))e^{x(y^2+z^2+1)},$$

$$\partial_{1,3}f(x, y, z) = 4xze^{x(y^2+z^2+1)} + 2x^2z(y^2 + z^2 + 1)e^{x(y^2+z^2+1)} = 2xz(2 + x(y^2 + z^2 + 1))e^{x(y^2+z^2+1)},$$

$$\partial_{2,2}f(x, y, z) = 2x^2e^{x(y^2+z^2+1)} + 2x^2y \times 2xye^{x(y^2+z^2+1)} = 2x^2(1 + 2xy^2)e^{x(y^2+z^2+1)},$$

$$\partial_{2,3}f(x, y, z) = 4x^2yze^{x(y^2+z^2+1)},$$

$$\partial_{3,3}f(x, y, z) = 2x^2e^{x(y^2+z^2+1)} + 2x^2z \times 2xz e^{x(y^2+z^2+1)} = 2x^2(1 + 2xz^2)e^{x(y^2+z^2+1)}.$$

- (b) Au point $(-1, 0, 0)$, on a donc :

$$\nabla^2 f(-1, 0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}.$$

La hessienne de f en $(-1, 0, 0)$ est bien diagonale. On a donc :

$$\text{Sp}(\nabla^2 f(-1, 0, 0)) = \{1/e, 2/e\} \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Ainsi f admet un minimum local au point critique $(-1, 0, 0)$.

On a de plus :

$$f(-1, 0, 0) = -\frac{1}{e}.$$

4. (a) On a pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $y^2 + z^2 + 1 \geq 1$.

- Si $x \geq 0$, on a $x(y^2 + z^2 + 1) \geq x$. Puis par croissance de l'exponentielle, on a : $e^{x(y^2+z^2+1)} \geq e^x$.
Puis par produit par $x \geq 0$, on a :

$$f(x, y, z) \geq xe^x.$$

- Si $x < 0$, on a $x(y^2 + z^2 + 1) \leq x$. Puis par croissance de l'exponentielle, on a : $e^{x(y^2+z^2+1)} \leq e^x$.
Puis par produit par $x < 0$, on a :

$$f(x, y, z) \geq xe^x.$$

(b) On étudie rapidement la fonction $h : x \mapsto xe^x$. h est \mathcal{C}^1 par opérations sur les fonctions usuelles. On a de plus pour $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x.$$

Donc $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Et donc, on a le tableau de variation :

t	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h'(t)$	$-$	0	$+$
$h(t)$			

Donc h admet un minimum global de $-\frac{1}{e}$.

On en déduit que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$f(x, y, z) \geq xe^x \geq -\frac{1}{e}$$

et donc f admet un minimum global en $(-1, 0, 0)$.

5. On pourrait étudier les points critiques de f sous contraintes mais ce n'est pas utile : on nous donne le potentiel point critique.

On cherche donc à étudier le signe de $f(x, y, z) - f(1, 0, 0)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{C}$.

On a pour $(x, y, z) \in \mathcal{C}$:

$$f(x, y, z) - f(1, 0, 0) = 1 \times e^{1 \times (y^2 + (-y)^2 + 1)} - 1 \times e^{1 \times (0^2 + 0^2 + 1)} = e^{1+2y^2} - e^1.$$

Comme $1 + 2y^2 \geq 1$, par croissance de \exp , on a $f(x, y, z) - f(1, 0, 0) \geq 0$.

Ainsi f atteint bien un minimum global en $(1, 0, 0)$ sous la contrainte \mathcal{C} . De plus $f(1, 0, 0) = e$.

6. (a) On a $y^2 + z^2 \geq 0$ et donc $y^2 + z^2 + 1 \neq 0$.

g est clairement \mathcal{C}^1 comme inverse d'une fonction polynomiale à valeurs dans \mathbb{R}^* .

Soit $(y, z) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(x, y) \text{ point critique de } g \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2ey}{(1+y^2+z^2)^2} = 0 \\ -\frac{2ez}{(1+y^2+z^2)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc g admet un unique point critique en $(0, 0)$.

On pourrait calculer les dérivées secondes, mais cela ne nous donnera que des renseignements locaux. Regardons plutôt pour $(y, z) \in \mathbb{R}^2$:

$$g(y, z) - g(0, 0) = \frac{e}{1 + y^2 + z^2} - \frac{e}{1} = \frac{e(1 - (1 + y^2 + z^2))}{1 + y^2 + z^2} = -\frac{y^2 + z^2}{1 + y^2 + z^2} \leq 0.$$

Donc g atteint un maximum global en $(0, 0)$. On a de plus $g(0, 0) = e$.

(b) On a pour tout $(x, y, z) \in C'$, $f(x, y, z) = g(y, z)$. Donc les valeurs atteintes par f sur C' sont les valeurs atteintes par g sur \mathbb{R}^2 .

On en déduit que f atteint un minimum global de valeur e en $y = 0$ et $z = 0$ et donc $x = 1$ (car sur C').

Exercice 3 - EDHEC ECS 2021

1. On a pour tout $x, y \in E$:

$$\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle.$$

En particulier pour $y = x$, on a :

$$\langle f(x), x \rangle = -\langle x, f(x) \rangle.$$

Comme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique, on a $\langle f(x), x \rangle = -\langle f(x), x \rangle$ et donc :

$$\langle f(x), x \rangle = 0.$$

2. Montrons que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont en somme directe.

Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Ainsi $f(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Montrons que $x = 0_E$.

On a :

$$\underbrace{\langle f(x), y \rangle}_{=0_E} = -\langle x, \underbrace{f(y)}_{=x} \rangle.$$

Et donc $x = 0_E$.

Ainsi $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont en somme directe.

De plus, on a d'après le théorème du rang :

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim E.$$

Donc par égalité des dimensions, $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires, c'est-à-dire :

$$\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E.$$

3. Soient $x, y \in E$. On a :

$$\begin{aligned} \langle s(x), y \rangle &= \langle f \circ f(x), y \rangle \\ &\stackrel{f \text{ antisymétrique}}{=} -\langle f(x), f(y) \rangle \\ &\stackrel{f \text{ antisymétrique}}{=} -\left(-\langle x, f \circ f(y) \rangle\right) \\ &= \langle x, s(y) \rangle. \end{aligned}$$

Donc s est symétrique.

Maintenant, soit $\lambda \in \text{Sp}(s)$. Soit $x \in E$ un vecteur propre associé. Calculons maintenant :

$$\underbrace{\langle f(x), f(x) \rangle}_{\geq 0} = -\langle x, s(x) \rangle = -\langle x, \lambda x \rangle = -\lambda \underbrace{\|x\|^2}_{\geq 0}.$$

Donc $\lambda \leq 0$.

On a donc bien $\text{Sp}(s) \subset \mathbb{R}_-$.

4. (a) Comme pour tout $x \in \text{Im}(f)$, on a $g(x) = f(x) \in \text{Im}(f)$, on a bien $\boxed{\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f)}$.

De plus, \boxed{g} est clairement linéaire puisque f l'est.

Donc \boxed{g} est un endomorphisme de $\text{Im}(f)$.

- (b) On sait déjà d'après les questions précédentes que $\boxed{\text{Sp}(t) \subset \mathbb{R}_-}$.

Il reste à montrer que $0 \notin \text{Sp}(t)$.

Soit $x \in \text{Im}(f)$ tel que $g(x) = 0 \times x$. Montrons que $x = 0_E$ (ce n'est donc pas un vecteur propre car il n'est pas non-nul).

Comme $g(x) = f(x)$, cela implique $f(x) = 0_E$ puis $x \in \text{Ker}(f)$.

D'où $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$ car la somme est directe. D'où $\boxed{x = 0_E}$.

Donc $\boxed{0 \notin \text{Sp}(t)}$ et $\boxed{\text{Sp}(t) \subset \mathbb{R}_-^*}$.

5. (a) $e_1 \in E_\lambda(t)$ par définition. Montrons que $g(e_1) \in E_\lambda(t)$.

On a :

$$t(g(e_1)) = g \circ g \circ g(e_1) = g \circ t(e_1) = g(\lambda e_1) = \lambda g(e_1).$$

Donc $\boxed{g(e_1) \in E_\lambda(t)}$.

Montrons que la famille est orthogonale. On a :

$$\langle e_1, g(e_1) \rangle = 0$$

car g est antisymétrique. $\boxed{\text{Donc la famille est orthogonale.}}$

Une famille orthogonale est libre si et seulement si aucun des vecteurs de la famille n'est nulle. On a $e_1 \neq 0_E$ par hypothèse.

De plus, si $g(e_1) = 0_E$, alors $t(e_1) = g \circ g(e_1) = 0_E$ et donc $\lambda = 0$. Or $\text{Sp}(t) \subset \mathbb{R}_-^*$. Donc $\boxed{g(e_1) \neq 0_E}$.

Ainsi $\boxed{(e_1, g(e_1))}$ est une famille orthogonale libre de $E_\lambda(t)$.

- (b) Soit F_2 l'orthogonale de $\text{Vect}(e_1, g(e_1))$ dans $E_\lambda(t)$. Si $\dim F_2 = 0$, alors la propriété à démontrer est vraie.

Sinon, il existe $e_2 \in F_2$ non nul également vecteur propre pour la valeur propre λ . D'après la question précédente, $(e_2, g(e_2))$ est une famille orthogonale libre de $E_\lambda(t)$. Montrons que c'est en fait une famille de F_2 .

On a déjà $e_2 \in F_2$ par construction. Montrons que $g(e_2) \in F_2$. Pour cela montrons que $g(e_2)$ est orthogonal à e_1 et $g(e_1)$.

On a :

$$\langle g(e_2), e_1 \rangle = -\underbrace{\langle e_2, g(e_1) \rangle}_{\in F_2} = 0$$

et :

$$\langle g(e_2), g(e_1) \rangle = -\underbrace{\langle e_2, t(e_1) \rangle}_{\in F_2} = -\lambda \underbrace{\langle e_2, e_1 \rangle}_{\in F_2} = 0.$$

Donc $(e_2, g(e_2))$ est une famille orthogonale libre de F_2 .

On peut alors réitérer le processus : on pose F_3 l'orthogonal de $\text{Vect}(e_2, g(e_2))$ dans F_2 . À nouveau, on pose $e_3 \in F_3$ avec $e_3 \neq 0_E$ si $\dim F_3 \neq 0$. On sait que $(e_3, g(e_3))$ est une famille orthogonale libre de F_2 et on prouve que c'est famille orthogonale libre de F_3 . Et ainsi de suite.

Le processus s'arrête lorsque l'on rencontre un F_{p+1} de dimension 0. On a alors p vecteurs e_i et p vecteurs $g(e_i)$ tels que $(e_i, g(e_i))$ soit une base orthogonale de $\text{Vect}(e_i, g(e_i))$ et :

$$E_\lambda(t) = \text{Vect}(e_1, g(e_1)) \oplus \text{Vect}(e_2, g(e_2)) \oplus \cdots \oplus \text{Vect}(e_p, g(e_p)).$$

et où les espaces vectoriels $\text{Vect}(e_i, g(e_i))$ sont orthogonaux.

Ainsi $\boxed{(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), \dots, e_p, g(e_p))}$ est une base orthogonale de $E_\lambda(t)$.

Et donc $\boxed{\dim E_\lambda(t)}$ est paire de dimension $2p$.

(b)

```

1 def sim_V(n, a):
    return np.max(uniforme(0, a, n))

```

(c) Toutes les courbes semblent tendre vers 1. Ainsi, on peut conjecturer que V_n est un estimateur convergent de a .

On peut aussi remarquer que les courbes sont systématiques inférieures à 1. On peut donc aussi conjecturer que V_n sera un estimateur biaisé (négativement).

2. (a) En notant F_{X_1} la fonction de répartition de X_1 , on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{a} & \text{si } x \in [0, a], \\ 1 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

(b) V_n est bien une variable aléatoire car $\max : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur \mathbb{R}^n . On note F_n sa fonction de répartition.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
 F_n(x) &= \mathbb{P}(V_n \leq x) \\
 &= \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\
 &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leq x]\right) \\
 &\quad \text{(le max est majoré ssi ils sont tous majorés)} \\
 &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \leq x) \\
 &\quad \text{(indépendance mutuelle des } X_k) \\
 &= (F_{X_1}(x))^n \\
 &\quad \text{(loi commune des } X_k) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^n & \text{si } x \in [0, a] \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases} .
 \end{aligned}$$

(c) La fonction de répartition obtenue est clairement \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 0[$, $]0, a[$ et $]a, +\infty[$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_n(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} F_n(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow a^+} F_n(x)$ et donc F_n est même \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R} .

Donc V_n est une variable à densité.

De plus, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, a\}$, on a :

$$F'_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]0, a[, \\ n \frac{x^{n-1}}{a^n} & \text{si } x \in]0, a[. \end{cases}$$

Donc la fonction :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0, a] \\ n \frac{x^{n-1}}{a^n} & \text{si } x \in [0, a] \end{cases} \end{cases}$$

est une densité de V_n .

3. V_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x) dx$$

converge absolument. Or on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x) dx = \int_0^a x n \frac{x^{n-1}}{a^n} dx$$

qui est donc une intégrale sur un segment, et qui converge absolument. Donc V_n admet une espérance.

De plus :

$$\begin{aligned} E(V_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x) dx \\ &= \int_0^a x n \frac{x^{n-1}}{a^n} dx \\ &= \frac{n}{a^n} \int_0^a x^n dx \\ &= \frac{n}{a^n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^a \\ &= \frac{n}{n+1} a. \end{aligned}$$

Comme $E(V_n) \neq a$ (puisque $a > 0$), l'estimateur V_n est biaisé.

4. Soit $\epsilon > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|V_n - a| \geq \epsilon) &= 1 - \mathbb{P}(|V_n - a| < \epsilon) \\ &= 1 - \mathbb{P}(a - \epsilon < V_n < a + \epsilon) \\ &= 1 - \mathbb{P}(a - \epsilon < V_n) \\ &\quad (\text{car } \mathbb{P}(V_n \leq a) = 1) \\ &= \mathbb{P}(V_n \leq a - \epsilon). \end{aligned}$$

- Si $\epsilon > a$, alors $\mathbb{P}(V_n \leq a - \epsilon) = 0$ (car $V_n \geq 0$) et donc :

$$\mathbb{P}(|V_n - a| \geq \epsilon) = 0.$$

- Si $\epsilon \leq a$, alors on utilise $\mathbb{P}(V_n \leq a - \epsilon) = F_n(a - \epsilon)$ pour trouver :

$$\mathbb{P}(|V_n - a| \geq \epsilon) = n \frac{(a - \epsilon)^{n-1}}{a^n} = \frac{n}{a} \left(1 - \frac{\epsilon}{a}\right)^n.$$

Dans tous les cas, on a :

$$\mathbb{P}(|V_n - a| \geq \epsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

(car c'est égal dans un cas et car $0 \leq 1 - \frac{\epsilon}{a} < 1$ dans le second cas) et donc :

$$V_n \xrightarrow{P} a$$

c'est-à-dire V_n est un estimateur convergent.

5. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(n(a - V_n) \leq t) &= \mathbb{P}\left(a - V_n \leq \frac{t}{n}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(V_n \geq a - \frac{t}{n}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(V_n < a - \frac{t}{n}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(V_n \leq a - \frac{t}{n}\right) \\ &\quad (\text{var } V_n \text{ est à densité}) \\ &= 1 - F_n\left(a - \frac{t}{n}\right). \end{aligned}$$

Remplaçons par l'expression de F_n . On a :

$$\mathbb{P}(n(a - V_n) \leq t) = \begin{cases} 1 - 0 & \text{si } t > na, \\ 1 - \left(\frac{a-t}{a}\right)^n, & \text{si } t \in [na, 0] \\ 1 - 1 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Pour t fixé et n suffisamment grand, on aura toujours $t \leq na$. Donc on aura, pour n suffisamment grand :

$$\mathbb{P}(n(a - V_n) \leq t) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{t}{na}\right)^n, & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

On a pour $t \geq 0$:

$$\left(1 - \frac{t}{na}\right)^n = \exp\left(n \ln\left[1 - \frac{t}{na}\right]\right).$$

Or :

$$n \ln\left[1 - \frac{t}{na}\right] = n \left[-\frac{t}{na} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = -\frac{t}{a} + o_{n \rightarrow +\infty}(1).$$

Donc :

$$\left(1 - \frac{t}{na}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t}{a}}.$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(n(a - V_n) \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{a}}, & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

On reconnaît à droite la fonction de répartition de la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$. Comme la limite est vraie en tout point de continuité (c-à-d sur \mathbb{R}) de cette fonction de répartition, on a :

$$V_n \xrightarrow{\mathcal{L}} V$$

où $V \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$.

6. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Pour $t \geq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(n(a - V_n) \leq t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-\frac{t}{a}}.$$

On résout donc :

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\frac{t}{a}} = 1 - \alpha &\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{a}} = \alpha \\ &\Leftrightarrow -\frac{t}{a} = \ln(\alpha) \\ &\Leftrightarrow t = -a \ln(\alpha). \end{aligned}$$

Et comme $\alpha \in]0, 1[$, on a bien $t > 0$.

On a :

$$\mathbb{P}(n(a - V_n) \leq -a \ln(\alpha)) = \mathbb{P}(a(n + \ln(\alpha)) \leq nV_n) = \mathbb{P}\left(a \leq \frac{nV_n}{n + \ln(\alpha)}\right).$$

De plus, on a $V_n \leq a$. Donc :

$$\mathbb{P}(n(a - V_n) \leq -a \ln(\alpha)) = \mathbb{P}\left(V_n \leq a \leq \frac{n}{n + \ln(\alpha)} V_n\right).$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}\left(V_n \leq a \leq \frac{n}{n + \ln(\alpha)} V_n\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \alpha.$$

Donc $\left[V_n, \frac{n}{n + \ln(\alpha)} V_n\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a au niveau de confiance $1 - \alpha$.

7. (a) D'après le théorème de transfert, V_n admet un moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x) dx$$

converge absolument. Comme pour l'espérance, cette intégrale est sur un segment et donc

V_n admet bien un moment d'ordre 2.

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_n^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x) dx \\ &= \int_0^a x^2 n \frac{x^{n-1}}{a^n} dx \\ &= \frac{n}{a^n} \int_0^a x^{n+1} dx \\ &= \frac{n}{a^n} \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^a \\ &= \frac{n}{n+2} a^2. \end{aligned}$$

- (b) On calcule :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((V_n - a)^2) &= \mathbb{E}(V_n^2 - 2aV_n + a^2) \\ &= \mathbb{E}(V_n^2) - 2a\mathbb{E}(V_n) + a^2 \\ &\quad (\text{par linéarité de l'espérance}) \\ &= \frac{n}{n+2} a^2 - 2a \frac{n}{n+1} a + a^2 \\ &= \frac{n(n+1) - 2n(n+2) + (n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} a^2 \\ &= \frac{a^2}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Markov à $(V_n - a)^2$ qui est positive et admet une espérance comme on vient de le montrer, on a pour tout $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}((V_n - a)^2 \leq \epsilon^2) \leq \frac{a^2}{(n+1)(n+2)\epsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Or $\mathbb{P}(|V_n - a| \leq \epsilon) = \mathbb{P}((V_n - a)^2 \leq \epsilon^2)$ et donc :

$$\mathbb{P}(|V_n - a| \leq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

c'est-à-dire :

$$V_n \xrightarrow{P} a.$$

Nous venons de retrouver que V_n est un estimateur convergent.

Partie II - Méthode des moments.

8.

```
1 def sim_M(n,a):
    x = uniforme(0,a,n)
    return 2*np.mean(x)
```

9. Par linéarité de l'espérance, \bar{X}_n admet une espérance. On a :

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \frac{\mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n)}{n} = \frac{n \times \frac{a}{2}}{n} = \frac{a}{2}.$$

De même, comme les X_i admettent une variance, \bar{X}_n en admet une également et par indépendance, on a :

$$\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \frac{\mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)}{n^2} = \frac{n \times \frac{a^2}{12}}{n^2} = \frac{a^2}{12n}.$$

On en déduit en particulier que :

$$\mathbb{E}(M_n) = 2\mathbb{E}(\bar{X}_n) = a$$

et donc M_n est un estimateur sans biais de a .

10. On a de manière similaire :

$$\mathbb{V}(M_n) = 4\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \frac{a^2}{3n}.$$

Comme M_n est sans biais, il est *a fortiori* asymptotiquement sans biais. Et comme $\mathbb{V}(M_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, on a que M_n est un estimateur convergent de a .

11. On a :

$$\sqrt{n}(M_n - a) = \sqrt{n}(2\bar{X}_n - a) = 2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{12n}}{a} \left(\bar{X}_n - \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{\sqrt{3}} \bar{X}_n^*$$

où \bar{X}_n^* est la moyenne empirique centrée réduite.

Comme les X_i sont indépendantes et identiquement distribuées, on a :

$$\bar{X}_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Puis en appliquant la fonction $t \mapsto \frac{a}{\sqrt{3}}t$ qui est continue, on obtient :

$$\sqrt{n}(M_n - a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{\sqrt{3}}X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{a^2}{3}\right)$$

où on a utilisé une transformation affine de loi normale.

12. Soit $t > 0$. On a d'une part :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sqrt{n}|M_n - a| \leq t) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{3n}}{a}|M_n - a| \leq \frac{\sqrt{3t}}{a}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n^*| \leq \frac{\sqrt{3t}}{a}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{\sqrt{3t}}{a} \leq \bar{X}_n^* \leq \frac{\sqrt{3t}}{a}\right) \end{aligned}$$

Notons Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On a alors :

$$\mathbb{P}\left(-\frac{\sqrt{3t}}{a} \leq \bar{X}_n^* \leq \frac{\sqrt{3t}}{a}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Phi\left(\frac{\sqrt{3t}}{a}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{3t}}{a}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{3t}}{a}\right) - 1$$

où on a utilisé $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.

Comme Φ est continue et strictement croissante (car de dérivée strictement positive) sur \mathbb{R} , d'après le théorème de la bijection, c'est une bijection de \mathbb{R} dans $]0, 1[$.

Il existe donc un unique $x_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(x_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. On obtient donc avec $t = \frac{a}{\sqrt{3}}x_\alpha$:

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}|M_n - a| \leq \frac{a}{\sqrt{3}}x_\alpha\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 - \alpha.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\sqrt{n}|M_n - a| \leq \frac{a}{\sqrt{3}}x_\alpha\right) &= \mathbb{P}\left(|M_n - a| \leq \frac{ax_\alpha}{\sqrt{3n}}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(a - \frac{ax_\alpha}{\sqrt{3n}} \leq M_n \leq a + \frac{ax_\alpha}{\sqrt{3n}}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(a\left[1 - \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}\right] \leq M_n \leq a\left[1 + \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}\right]\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{1 + \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}} \leq a \leq \frac{M_n}{1 - \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}}\right).
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{1 + \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}} \leq a \leq \frac{M_n}{1 - \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \alpha.$$

Donc $\left[\frac{M_n}{1 + \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}}, \frac{M_n}{1 - \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Pour comparer les intervalles de confiance, nous n'avons pas vraiment besoin de la valeur de t_α . Le point important est la dépendance en n : est-ce que lorsque n grandit, on obtient une meilleur approximation et à quel point ?

Considérons l'intervalle de confiance asymptotique $\left[V_n, \frac{n}{n + \ln(\alpha)}V_n\right]$. L'intervalle est d'amplitude :

$$\begin{aligned}
 \frac{n}{n + \ln(\alpha)}V_n - V_n &= \left(\frac{1}{1 + \frac{\ln(\alpha)}{n}} - 1\right)V_n \\
 &= \left(1 - \frac{\ln(\alpha)}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)V_n \\
 &= -\frac{\ln(\alpha)}{n}V_n + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

en considérant que V_n est borné (car dans $[0, a]$). La taille de l'intervalle est bien positive car $\alpha \in]0, 1[$ et donc $\ln(\alpha) < 0$. La taille de l'intervalle évolue donc comme $\frac{1}{n}$.

L'amplitude de l'intervalle $\left[\frac{M_n}{1 + \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}}, \frac{M_n}{1 - \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}}\right]$ est quant à elle :

$$\begin{aligned}
 \frac{M_n}{1 - \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}} - \frac{M_n}{1 + \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}} &= \frac{\sqrt{3n}M_n}{\sqrt{3n} - x_\alpha} - \frac{\sqrt{3n}M_n}{\sqrt{3n} + x_\alpha} \\
 &= \sqrt{3n}M_n \times \frac{\sqrt{3n} + x_\alpha - \sqrt{3n} + x_\alpha}{(\sqrt{3n} - x_\alpha)(\sqrt{3n} + x_\alpha)} \\
 &= \frac{2\sqrt{3n}x_\alpha M_n}{3n - x_\alpha^2} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2x_\alpha M_n}{\sqrt{3n}}
 \end{aligned}$$

Cette fois la taille de l'intervalle évolue comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Donc pour n grand, cette intervalle sera plus grand (et donc moins précis) que celui du maximum de vraisemblance.

Ainsi, sur les considérations de précisions de l'intervalle (pour le même niveau de confiance), il semble que

$$\left[V_n, \frac{n}{n + \ln(\alpha)}V_n\right] \text{ soit un meilleur intervalle de confiance que } \left[\frac{M_n}{1 + \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}}, \frac{M_n}{1 - \frac{x_\alpha}{\sqrt{3n}}}\right].$$

13. On a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}((M_n - a)^2) &= \mathbb{E}(M_n^2 - 2aM_n + a^2) \\
 &= \mathbb{E}(M_n^2) - 2a\mathbb{E}(M_n) + a^2 \\
 &= \mathbb{V}(M_n) + \mathbb{E}(M_n)^2 - 2a\mathbb{E}(M_n) + a^2 \\
 &= 4\mathbb{V}(\bar{X}_n) + 4\mathbb{E}(\bar{X}_n)^2 - 4a\mathbb{E}(\bar{X}_n) + a^2 \\
 &= 4 \times \frac{a^2}{12n} + 4 \times \frac{a^2}{4} - 4a \times \frac{a}{2} + a^2 \\
 &= \frac{a^2 + 3na^2 - 6na^2 + 3na^2}{3n} \\
 &= \boxed{\frac{a^2}{3n}}.
 \end{aligned}$$

On avait trouvé dans une question précédente :

$$\mathbb{E}((V_n - a)^2) = \frac{2a^2}{(n+1)(n+2)}.$$

On peut donner une interprétation de ces résultats. La formule $\mathbb{E}((X - a)^2)$ ressemble à la formule de la variance où on aurait remplacé l'espérance par a . Au lieu d'être l'écart quadratique moyen à l'espérance, c'est l'écart quadratique moyen à a .

Cela signifie que plus $\mathbb{E}((X - a)^2)$ est faible, plus, en moyenne, l'estimateur X est proche de a . Ici, on a :

$$\mathbb{E}((M_n - a)^2) = \frac{a^2}{3n} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}((V_n - a)^2) = \frac{2a^2}{(n+1)(n+2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2a^2}{n^2}.$$

Donc encore une fois, pour n grand, l'écart quadratique moyen à a de V_n est sensiblement plus faible que celui de M_n . Dit autrement : V_n est plus rapidement proche de a que M_n .

C'est ce qu'on observe sur les graphiques : les valeurs observées pour V_n se resserrent rapidement autour de 1, alors que celles de M_n , même si effectivement elles convergent, semblent encore osciller de manière sensible à vers $n = 100$.

Remarque : La quantité $\mathbb{E}((X - a)^2)$ porte en fait un nom : c'est le risque quadratique. C'était dans le précédent programme et a disparu mais apparaît, sans être nommé, dans quelques preuves.

Partie III - Consistance de ces estimateurs.

14. (a) Soit $t \in]a, 2a]$. On a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(V_n \leq t) &= \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq t) \\
 &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leq t]\right) \\
 &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \leq t) \\
 &\quad \text{(par indépendance)} \\
 &= \mathbb{P}(X_1 \leq t) \left(\mathbb{P}(X_2 \leq t)\right)^{n-1} \\
 &\quad \text{(loi commune pour } X_2 \text{ à } X_n) \\
 &= \mathbb{P}(X_1 \leq t) \\
 &\quad \text{(car } X_2 \leq a) \\
 &= \boxed{\frac{t}{2a}} \\
 &\quad \text{(fonction de répartition pour } t \in [0, 2a])
 \end{aligned}$$

(b) Notons F_{V_n} la fonction de répartition de V_n .

On a clairement pour $t < 0$:

$$F_{V_n}(t) = \mathbb{P}(V_n \leq t) = 0$$

et pour $t > 2a$:

$$F_{V_n}(t) = \mathbb{P}(V_n \leq t) = 1.$$

On vient de calculer le cas $t \in]a, 2a]$. Il reste donc le cas $t \in [0, a]$:

$$\begin{aligned} F_{V_n}(t) &= \mathbb{P}(V_n \leq t) \\ &= \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq t) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leq t]\right) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \leq t) \\ &\quad (\text{par indépendance}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t) \left(\mathbb{P}(X_2 \leq t)\right)^{n-1} \\ &\quad (\text{loi commune pour } X_2 \text{ à } X_n) \\ &= \frac{t}{2a} \times \left(\frac{t}{a}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{t}{a}\right)^n. \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction de répartition de V_n s'exprime pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$F_{V_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{t}{a}\right)^n & \text{si } t \in [0, a] \\ \frac{t}{2a} & \text{si } t \in]a, 2a] \\ 1 & \text{si } t > 2a \end{cases}.$$

Quand n tend vers l'infini, pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, on a alors :

$$F_{V_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \in [0, a[\\ \frac{1}{2} & \text{si } t = a \\ \frac{t}{2a} & \text{si } t \in]a, 2a] \\ 1 & \text{si } t > 2a \end{cases}$$

La fonction F définie par :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t}{2a} & \text{si } t \in [a, 2a] \\ 1 & \text{si } t > 2a \end{cases}$$

est bien croissante, continue à droite et de limites :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1.$$

Donc F est bien une fonction de répartition. En tout point $t \in \mathbb{R}$ et donc, *a fortiori*, en tout point de continuité de F , on a :

$$F_{V_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow} F(t).$$

Donc V_n converge en loi vers la variable décrite par la fonction de répartition F .

(c) On a :

$$\mathbb{P}\left(V_n > \frac{3}{2}a\right) = 1 - \mathbb{P}\left(V_n \leq \frac{3}{2}a\right) = 1 - \frac{\frac{3}{2}a}{2a} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi V_n n'est pas un estimateur convergent.

En effet, si V_n était convergent, on aurait :

$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(|V_n - a| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ce serait vrai en particulier pour $\epsilon = \frac{a}{2}$. Or :

$$0 \leq \mathbb{P}\left(V_n > \frac{3}{2}a\right) \leq \mathbb{P}\left(|V_n - a| \geq \frac{1}{2}a\right).$$

Donc si V_n était convergent, on aurait $\mathbb{P}\left(V_n > \frac{3}{2}a\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui est faux.

15. (a) On a :

$$M_n = \frac{2}{n}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{2}{n}X_1 + \frac{2}{n} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{2}{n-1}(X_2 \dots + X_n) = \frac{2}{n}X_1 + \frac{n-1}{n}M'_n.$$

(b) On a donc :

$$\begin{aligned} |M_n - a| &= \left| \frac{2}{n}X_1 + \frac{n-1}{n}M'_n - a \right| \\ &\leq \left| \frac{2}{n}X_1 - \frac{a}{n} \right| + \left| \frac{n-1}{n}M'_n - \frac{n-1}{n}a \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \underbrace{|2X_1 - a|}_{\leq 3a \text{ car } X_1 \in [0, 2a]} + \frac{n-1}{n} \underbrace{|M'_n - a|}_{\leq 1} \\ &\leq \frac{3a}{n} + |M'_n - a|. \end{aligned}$$

(c) Pour $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned} |M_n - a| &\leq \frac{3a}{n} + |M'_n - a| \\ &\leq \frac{3a}{n_0} + |M'_n - a| \\ &< \epsilon + |M'_n - a|. \end{aligned}$$

Donc si $|M'_n - a| < \epsilon$ alors $|M_n - a| < 2\epsilon$ et ainsi :

$$\left[|M'_n - a| < \epsilon \right] \subset \left[|M_n - a| < 2\epsilon \right].$$

(d) En passant aux événements contraires, on trouve :

$$\left[|M'_n - a| \geq \epsilon \right] \supset \left[|M_n - a| \geq 2\epsilon \right].$$

Donc, pour n suffisamment grand et en posant $\epsilon' = 2\epsilon$, on a :

$$0 \leq \mathbb{P}\left(|M_n - a| \geq \epsilon'\right) \leq \mathbb{P}\left(|M'_n - a| \geq \frac{\epsilon'}{2}\right).$$

Or M'_n est un estimateur convergent et donc le membre de droite tend vers 0. D'où, par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(|M_n - a| \geq \epsilon'\right) = 0$$

c'est-à-dire, $M_n \xrightarrow{P} a$.

16. On constate qu'en introduisant une erreur, V_n n'est plus convergent, mais M_n le reste. La précision supplémentaire de V_n a un coût : il est moins robuste aux erreurs.