

RÉVISIONS - EM LYON 2018

Problème 1

On définit la fonction I d'une variable réelle x par : $I(x) = \int_0^1 \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

Partie I - Étude d'une suite d'intégrales

On pose, pour tout k de \mathbb{N} , $W_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(u))^k u$.

1. Calculer les intégrales W_0 et W_1 .
2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer : $W_k - W_{k+2} = \frac{1}{k+1} W_{k+2}$.
(b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\pi}{2}$.

Partie II - Une autre expression de $I(x)$

3. Montrer que, pour tout k de \mathbb{N} , l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge et que $\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt = W_k$.
Pour cela, on pourra utiliser le changement de variable $t = \sin(u)$ après avoir justifié sa validité.
4. (a) Montrer que la fonction I est définie sur \mathbb{R} et préciser sa parité.
(b) Donner la valeur de $I(0)$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
(a) Soient $t \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ appliquée à la fonction $u \mapsto e^u + e^{-u}$ entre 0 et xt , montrer :

$$\left| e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^n \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x.$$

- (b) En déduire, pour tout n de \mathbb{N} : $\left| I(x) - \sum_{k=0}^n \frac{2x^{2k}}{(2k)!} W_{2k} \right| \leq \frac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!} e^x$.
- (c) En déduire que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ converge et que l'on a : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{1}{\pi} I(x)$.

Partie III - Équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

6. Montrer, pour tout x de \mathbb{R}_+ : $0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \frac{\pi}{2}$.
7. (a) Montrer, pour tout v de $[0, \frac{1}{2}]$: $1 \leq \frac{1}{1-v} \leq (1+v)^2$.
(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer, à l'aide du changement de variable $u = 1 - t$:

$$\int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}} u.$$

- (c) En déduire, pour tout x de \mathbb{R}_+ :

$$\frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} u \leq \int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} u + \frac{e^x}{2\sqrt{2}} \int_0^1 e^{-xu} \sqrt{u} u.$$

8. (a) Rappeler l'expression d'une densité de la loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$.
En déduire les convergences et les valeurs des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{xu}$, montrer :

$$\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} u \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \int_0^1 e^{-xu} \sqrt{u} u \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}.$$

9. En déduire : $I(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x \sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}$.

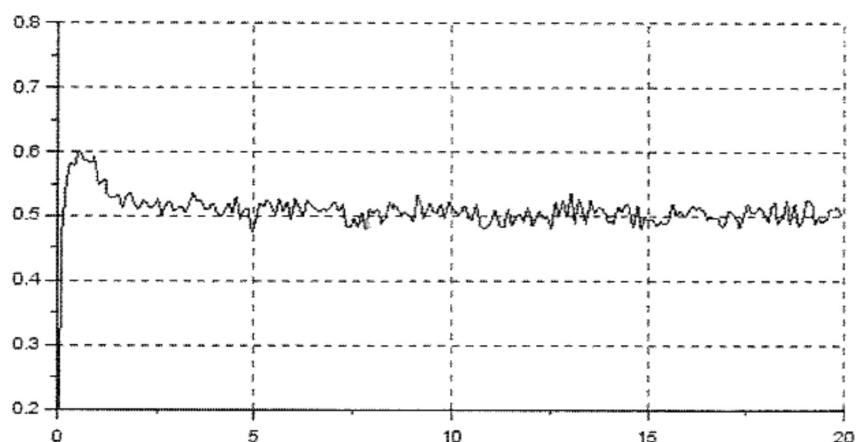
Partie IV - Une application en probabilités

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ .

On s'intéresse à la probabilité de l'événement $[X = Y]$.

10. (a) Écrire une fonction Python d'en-tête **def estime(mu)** : qui, prenant en argument un réel **mu** strictement positif, simule un grand nombre de fois les variables aléatoires X et Y , et renvoie une estimation de $P([X = Y])$.
On rappelle que l'instruction **rd.poisson(mu)** simule la loi de Poisson de paramètre **mu**.
- (b) Grâce à la fonction précédente, on trace, en fonction de λ , une estimation de $\sqrt{\pi\lambda}P([X = Y])$ pour $\lambda \in]0; 20]$ et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, proposer un équivalent de $P([X = Y])$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

11. Montrer : $P([X = Y]) = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}$.
12. (a) Exprimer $P([X = Y])$ en fonction de λ et de la fonction I .
(b) En déduire un équivalent de $P([X = Y])$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Problème 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n , et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP.$$

Partie I - Étude d'un endomorphisme de polynômes

- (a) Montrer que φ est une application linéaire.
(b) Calculer $\varphi(X^n)$.
(c) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
- Déterminer la matrice A de φ dans la base \mathcal{B} . Préciser le rang de cette matrice.
- (a) L'endomorphisme φ est-il injectif? Justifier votre réponse.
(b) Calculer $\varphi((X-1)^n)$.
(c) En déduire une base de $\ker(\varphi)$.
- Montrer que φ est diagonalisable.
- On pose, pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
(a) Pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, calculer $\varphi(P_k)$.

- (b) Montrer que la famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.
 (c) Déterminer les sous-espaces propres de φ .

Partie II - Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

On note alors, pour tout k de \mathbb{N}^* , Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.

Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.

6. On note, pour tout k de \mathbb{N}^* , Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le k -ième tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.

On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.

- (a) Déterminer la loi de Z_2 .
 (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$, la valeur de $P_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1])$.
 En déduire : $P([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n}E(Y_k)$.
 (c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \sum_{j=1}^k Z_j$, montrer :

$$P([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k P([Z_j = 1]).$$

- (d) En déduire, pour tout k de \mathbb{N}^* : $P([Z_k = 1]) = (1 - \frac{1}{n})^{k-1}$.
 (e) Déterminer alors, pour tout k de \mathbb{N} , l'espérance de Y_k .
 7. On note, pour tout k de \mathbb{N} , G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$G_k = \sum_{i=0}^n P([Y_k = i])X^i.$$

- (a) Déterminer les polynômes G_0 , G_1 et G_2 .
 (b) Montrer, pour tout k de \mathbb{N} et tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P([Y_{k+1} = i]) = \frac{i}{n}P([Y_k = i]) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)P([Y_k = i-1]).$$

- (c) Montrer, pour tout k de \mathbb{N} :

$$G_{k+1} = \frac{1}{n}X(1-X)G'_k + XG_k.$$

- (d) En déduire, pour tout k de \mathbb{N} :

$$G_k = \varphi^k(G_0).$$

8. (a) Pour tout k de \mathbb{N} , calculer $G_k(1)$ et $G'_k(1)$.
 (b) En déduire, pour tout k de \mathbb{N} :

$$E(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)E(Y_k) + 1.$$

- (c) Retrouver alors, pour tout k de \mathbb{N} , l'expression de $E(Y_k)$ obtenue en question 6e.

9. On rappelle que les polynômes P_0, \dots, P_n sont définis à la question 5. par :

$$\text{pour tout } j \text{ de } \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P_j = X^j(1-X)^{n-j}.$$

- (a) Calculer $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j$.

- (b) Montrer, pour tout j de $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P_j = \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i.$$

(c) En déduire, pour tout k de \mathbb{N} :

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i.$$

(d) Montrer finalement, pour tout k de \mathbb{N} et pour tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.$$