Révisions - EM Lyon 2018 - Correction

Problème 1

Partie I - Étude d'une suite d'intégrales

1.

On a $\boxed{W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1du = \pi/2}$ et $\boxed{W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)du = [-\cos(u)]_0^{\pi/2} = 1}$.

2. (a)

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$W_k - W_{k+2} \underset{\text{linéarité}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)^k \left(1 - \sin(x)^2\right) \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)^k \cos(u)^2 \,\mathrm{d}u.$$

Comme tout est $\mathcal{C}^1$ on peut faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned} W_k - W_{k+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos(u)\sin(u)^k}_{=v'(u)} \underbrace{\cos(u)}_{=w(u)} \mathrm{d}u \\ &= \left[\underbrace{\frac{1}{k+1}\sin(u)^{k+1}}_{=v(u)} \underbrace{\cos(u)}_{=w(u)}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{k+1}\sin(u)^{k+1}}_{=v(u)} \underbrace{(-\sin(u))}_{=w'(u)} du \\ &= 0 - \frac{1}{k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\sin(u)^{k+1}\, du = \frac{1}{k+1} W_{k+2} \end{aligned}$$

et on a donc bien $\boxed{W_k - W_{k+2} = \frac{1}{k+1} W_{k+2}}$

(b)

Cela permet d'établir la relation de récurrence : $W_k = \left(\frac{1}{k+1} + 1\right) W_{k+2}$ et $\boxed{W_{k+2} = \frac{k+1}{k+2} W_k}$

Puis, récurrence :

- **Initialisation :** pour $n = 0$, on a :

$$w_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{0!}{2^0(0!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{\text{Donc } w_0 = \frac{0!}{2^0(0!)^2}\frac{\pi}{2}.}$

- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{\pi}{2}$.

On a :

$$\begin{aligned} W_{2(k+1)} &= W_{2k+2} \\ &= \frac{2k+1}{2k+2} W_{k2} \\ &= \frac{2k+2}{2k+2}\frac{2k+1}{2k+2}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2^2\,(k+1)^2}\frac{(2k+2)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{(2k+2)!}{2^{2(k+1)}((k+1)!)^2}\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier } k : W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{\pi}{2}.}$

Partie II - Une autre expression de $I(x)$

3.

$\varphi : u \mapsto \sin(u)$ est une bijection croissante et de classe C^1 de $]0,\pi/2[$ sur $]0,1[$. Le changement de variable est donc licite.
Les intégrales suivantes ont donc même nature et le cas échéant, sont égales :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi/2} f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Comme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(u))^k \mathrm{d}u$ converge (intégrale sur un segment), alors $\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ converge et $\boxed{\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt = W_k.}$

4. (a)

$t \mapsto \frac{e^{xt}+e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}$ continue $[0,1[$. Donc l'intégrale est généralisée en 1.
Or on a :

$$\lim_{t\to 1^-} e^{xt}+e^{-xt} = e^x + e^{-x}$$

donc :

$$\frac{e^{xt}+e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1^-}{\sim} \left(e^x+e^{-x}\right)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

où e^x+e^{-x} est une constante vis-à-vis de t. Or $\int_0^1 \frac{t^0}{\sqrt{1-t^2}}$ converge. Donc par équivalent d'intégrales de fonctions positives, $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}+\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge également.
$\boxed{\text{Donc } I \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $I(-x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}+\mathrm{e}^{+xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt = I(x)$
$\boxed{\text{Donc } I \text{ est paire}}$

(b)

On a $\boxed{I(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{0t}+\mathrm{e}^{-0t}}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\int_0^1 \frac{t^0}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2W_0 = \pi}$.

5. (a)

Soient $t \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}$.
$f : u \longmapsto \mathrm{e}^{u} + \mathrm{e}^{-u}$ est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}^{+}$ et $f^{(k)}(u) = \mathrm{e}^{u} + (-1)^{k}\mathrm{e}^{-u}$
Pour $u \in [0, xt]$: $f^{(2n+1)}(u) = \mathrm{e}^{u} - \mathrm{e}^{-u}$ donc $0 \leq f^{(2n+1)}(u) \leq e^{u} \leq e^{xt} \leq e^{x}$ et $\boxed{\left|f^{(2n+1)}(u)\right| \leq e^{x}}$ car $t \in [0,1]$
Donc avec l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ appliquée à la fonction entre 0 et xt :

$$\left|f(xt) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(xt-0)^{k}\right| \leq \frac{|xt|^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^{x} \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^{x}.$$

Quand k est impair, $f^{(k)}(0) = e^{0} - e^{0} = 0$ et pour k pair $f^{(k)}(0) = 2$. Donc :

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(xt-0)^{k} = \sum_{k=0:k \text{ pair}}^{2n} \frac{2}{k!}(xt)^{k}.$$

En réindexant par $k = 2h$ on obtient $\boxed{\left|\mathrm{e}^{xt} + \mathrm{e}^{-xt} - \sum_{h=0}^{n} \frac{2(xt)^{2h}}{(2h)!}\right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^{x}.}$

(b)

On reconstruit alors l'inégalité sur $I(x)$: pour tout $t \in [0, 1[$:

$$\boxed{\left|\frac{\mathrm{e}^{xt}+\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^{2}}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!}\frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^{2}}}\right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^{x}}$$

avec les bornes croissantes

$$\begin{aligned}\left|\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^{xt}+\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^{2}}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!}\frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^{2}}}dt\right| &\leq \int_{0}^{1}\left|\frac{\mathrm{e}^{xt}+\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^{2}}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!}\frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^{2}}}\right|dt \\ &\leq \int_{0}^{1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^{x}dt = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^{x}\end{aligned}$$

finalement

$$\left|I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!}\int_{0}^{1} \frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^{2}}}dt\right| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{e}^{x}.$$

Puis pour tout n de $\mathbb{N}$: $\boxed{\left|I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!}W_{2k}\right| \leq \frac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!}\mathrm{e}^{x}.}$

(c)

Quand n tend vers $+\infty$, on a : $\frac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!}\mathrm{e}^{x} \to 0$ puisque x est une constante.
Donc $\left|I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!}W_{2k}\right| \to 0$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!}W_{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^{2}}\frac{\pi}{2} \to I(x)$.
Ainsi $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^{2}} \to \frac{1}{\pi}I(x)$ et finalement :

$$\boxed{\sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^{2}} \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^{2}} = \frac{1}{\pi}I(x).}$$

Partie III - Équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

6.

Pour tout $t \in [0,1]$, on a $0 \leqslant \mathrm{e}^{-xt} \leqslant e^0$. Donc :

$$0 \leq \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc bien :

$$\boxed{0 \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = W_0 = \frac{\pi}{2}.}$$

7. (a)

Pour tout $v \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$: $\frac{1}{1-v} - 1 = \frac{v}{1-v} \geq 0$ et

$$\begin{aligned} (1+v)^2 - \frac{1}{1-v} &= \frac{(1+v)^2(1-v) - 1}{1-v} = \frac{\left(1-v^2\right)(1+v) - 1}{1-v} \\ &= \frac{v - v^2 - v^3}{1-v} = \frac{v\left(1-v-v^2\right)}{1-v} \end{aligned}$$

Or $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$ donc $0 \leq v^2 \leq \frac{1}{4}$ et $0 \leq v + v^2 \leq \frac{3}{4}$ donc $1 - v - v^2 \geq \frac{1}{4} \geq 0$ et $\frac{v\left(1-v-v^2\right)}{1-v} \geq 0$.
Finalement, $\boxed{\text{pour tout } v \text{ de } \left[0, \frac{1}{2}\right] : 1 \leq \frac{1}{1-v} \leq (1+v)^2}$.

(b)

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $\frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} \sim_{t \to 1} \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{1-t^2}}$ et comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = W_0$ converge, par équivalence de fonctions positives, $\boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t \text{ converge}}$.
La fonction $t \mapsto 1-t$ est une bijection décroissante et de classe C^1 de $]0,1[$ dans $]0,1[$. Donc le changement de variable est possible et les intégrales ont même nature (convergentes en l'occurence) et sont égales :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = \int_1^0 -\frac{\mathrm{e}^{x(1-u)}}{\sqrt{u(2-u)}} \mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}} \frac{e^{-xu}}{\sqrt{1-u/2}\sqrt{u}} \mathrm{d}u$$

donc $\boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-u/2}} \mathrm{d}u}$.

(c)

On a pour tout v de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$: $1 \leq \frac{1}{1-v} \leq (1+v)^2$. Or, pour $u \in [0,1]$: $\frac{u}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Donc $1 \leq \frac{1}{1-u/2} \leq \left(1 + \frac{u}{2}\right)^2$ et $1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-u/2}} \leq 1 + \frac{u}{2}$.
En multipliant par $\frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} \geq 0$, on obtient :

$$\frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-u/2}} \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} \leq \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} \left(1 + \frac{u}{2}\right)$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u \leq \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-u/2}} \mathrm{d}u \leq \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} \left(1 + \frac{u}{2}\right) \mathrm{d}u$$

et enfin :

$$\boxed{\frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \leq \int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \leq \frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u + \frac{e^x}{2\sqrt{2}}\int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}\mathrm{d}u.}$$

8. (a)

Une densité de la loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$ est donnée par : $t \mapsto \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}} e^{-\left(t\sqrt{2}\right)^2/2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}.}$

Avec $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1/2)$ on a $\mathrm{P}(X \geq 0) = \frac{1}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}\mathrm{d}t$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et vaut $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Sa variance est $\frac{1}{2} = E\left(X^2\right) - E\left(X^2\right) = E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Puis, par parité, on a $\boxed{\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.}$

(b)

L'application $u \mapsto \sqrt{xu}$ est une bijection croissante et C^1 de $]0,1[$ dans $]0,\sqrt{x}[$. Le changement est possible. On a sous réserve de convergence :

$$\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2}{\sqrt{x}}e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Il y a donc convergence. Et, comme $\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ quand $x \to +\infty$, $\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et par produit $\boxed{\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}.}$

De même :

$$\int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}\mathrm{d}u = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2}{x\sqrt{x}}e^{-\sqrt{xu}^2}\sqrt{xu}^2\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{u}}e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{x\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

et $\int_0^{\sqrt{x}} t^2e^{-t^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ donc

$$\int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{2}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}.$$

et on a donc bien $\boxed{\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}.}$

9.

On a

$$I(x) = \int_0^1 \frac{e^{xt}+e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt + \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

où la seconde intégrale est bornée puisque $0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt \leq \frac{\pi}{2}$.

La première a été encadrée avec

$$\underbrace{\frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}du}_{a(x)} \leq \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}dt}_{b(x)} \leq \underbrace{\frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}du}_{a(x)} + \underbrace{\frac{e^x}{2\sqrt{2}}\int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}du}_{c(x)}$$

avec $a(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$ et $b(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}} = \underset{x\to+\infty}{o}(a(x))$. Donc $a(x)+b(x) \sim a(x)$ et on a :

$$\underbrace{\frac{a(x)}{e^x\sqrt{\pi}/\sqrt{2x}}}_{\to 1} \leq \frac{b(x)}{e^x\sqrt{\pi}/\sqrt{2x}} \leq \underbrace{\frac{a(x)+b(x)}{e^x\sqrt{\pi}/\sqrt{2x}}}_{\to 1}.$$

Par encadrement, $\frac{b(x)}{e^x\sqrt{\pi}/\sqrt{2x}} \to 1$ quand $x \to +\infty$ donc $\boxed{I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}.}$

Partie IV - Une application en probabilités

10. (a)

Pour estimer $P(X=Y)$, on prend comme estimateur la moyenne statistique des réalisations de cet événement. On réalise ainsi n fois une double simulation de Poisson dont on teste l'égalité. Un compteur `cpt` totalise les occurences.

```
def estime(mu):
  n = 1000
  cpt = 0
  for i in range(1,n+1):
    if rd.poisson(mu) == rd.poisson(mu):
      cpt = cpt+1
  return cpt/n
```

(b)

$2\sqrt{\pi\lambda}P([X=Y])$ semble tendre vers 0.5.

Donc $2\sqrt{\pi\lambda}P([X=Y]) = \frac{P([X=Y])}{1/(2\sqrt{\pi\lambda})}$ tend vers 1 et $\boxed{P([X=Y]) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}} \text{ quand } \lambda \text{ tend vers } +\infty}$.

11.

On a $[X=Y] = \bigcup_{k=0}^{+\infty} [X=k \cap Y=k]$ réunion disjointes. Ainsi :

$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k \cap Y=k)$$

et comme X et Y sont indépendantes :

$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\,P(Y=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

avec $e^{-\lambda}$ constante par rapport à k donc $\boxed{P([X=Y]) = e^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.}$

12. (a)

On se souvient que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2} = \frac{1}{\pi} I(x)$ pour $x \geq 0$.

On ajuste avec $\frac{x}{2}=\lambda$ donc $x=2\lambda$: $\boxed{\mathrm{P}([X=Y])=\frac{e^{-2\lambda}}{\pi}I(2\lambda)}$.

(b)

Et comme $I(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{e}^{x}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}$ en substituant $x=2\lambda\to+\infty$ on a

$\boxed{\mathrm{P}([X=Y])\sim\frac{e^{-2\lambda}}{\pi}\frac{e^{2\lambda}\sqrt{\pi}}{\sqrt{4\lambda}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}\text{ lorsque }\lambda\text{ tend vers }+\infty.}$

Problème 2

Partie I - Étude d'un endomorphisme de polynômes

1. (a)

Soient $P,Q\in E$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha P+Q)&=\frac{1}{n}X(1-X)(\alpha P+Q)'+X(\alpha P+Q)\\&=\alpha\left(\frac{1}{n}X(1-X)P'+XP\right)+\left(\frac{1}{n}X(1-X)Q'+XQ\right)\\&=\alpha\varphi(P)+\varphi(Q)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc }\varphi\text{ est une application linéaire.}}$

(b)

$\boxed{\varphi(X^n)=\frac{1}{n}X(1-X)nX^{n-1}+X\cdot X^n=X^n.}$

(c)

φ est linéaire de E dans $\mathbb{R}[X]$. Il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(\varphi)\subset\mathbb{R}_n[X]=E$.
Soit $P\in E$. Il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ et $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P=\alpha X^n+Q$. On a :

$$\varphi(P)=\varphi(\alpha X^n+Q)=\alpha X^n+\varphi(Q).$$

Or si $\deg Q\leq n-1$ alors $\deg\left(\frac{1}{n}X(1-X)Q'+XQ\right)\leq n$. Donc $\deg\varphi(P)\leq n$ et $\varphi(P)\in E$.
Donc $\boxed{\varphi\text{ est un endomorphisme de }E.}$

2.

On a pour $1\leq k<n$:

$$\varphi\left(X^k\right)=\frac{1}{n}X(1-X)kX^{k-1}+XX^k=\frac{k}{n}X^k+\frac{n-k}{n}X^{k+1}$$

et $\varphi(1) = X$ donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{n} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & \frac{2}{n} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \frac{n-2}{n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} & \frac{n}{n} \end{pmatrix}$

C'est une matrice échelonnée donc son rang est le nombre de pivots : $\boxed{\mathrm{rg}\,(A) = n-1.}$

3. (a)

Comme $\mathrm{rg}\,(A) = n-1$, d'après le théorème du range : $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 1$.
Donc $\mathrm{Ker}\,(\varphi) \neq \{0\}$ et $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injectif.}}$

(b)

$$\boxed{\varphi\left((X-1)^n\right) = \frac{1}{n}X(1-X)n\,(X-1)^{n-1} + X\,(X-1)^n = 0.}$$

(c)

Donc $(X-1)^n$ est une famille libre (un vecteur non nul) de 1 vecteur de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Or $\dim \mathrm{Ker}\,(\varphi) = 1$ donc $\boxed{((X-1)^n) \text{ est une base du noyau.}}$

4.

A est triangulaire. Ses valeurs propres sont sur la diagonale.
Donc φ a $n+1$ valeurs propres distinctes. Et $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable.}}$

5. (a)

Pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, on a : $P_k' = kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)\,X^k\,(1-X)^{n-k-1}$ (nulle pour $n = k$). Donc :

$$\begin{aligned} \varphi(P_k) &= \frac{1}{n}X\,(1-X)\left[kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)\,X^k\,(1-X)^{n-k-1}\right] + XX^k(1-X)^{n-k} \\ &= X^k(1-X)^{n-k}\left[\frac{k}{n}(1-X) - \frac{n-k}{n}X + X\right] \\ &= \boxed{\frac{k}{n}P_k.} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On vérifie aisément que ce résultat est vrai encore pour } k = 0 \text{ et } k = n.}$

(b)

Ainsi $P_k \neq 0$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{k}{n}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
Les valeurs propres étant distinctes, la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre.

C'est ainsi une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Donc $\boxed{(P_0, P_1, \ldots, P_n) \text{ est une base de } E.}$

Enfin $\boxed{\text{la matrice de } \varphi \text{ dans cette base est : } \begin{pmatrix} 0/n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1/n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & n/n \end{pmatrix}}$.

(c)

On a ici $n+1$ valeurs propres distinctes. Il n'y en a donc pas d'autres et les sous-espaces propres sont tous de dimensions 1. $\boxed{\text{Les sous espaces propres de } \varphi \text{ sont donc } \mathrm{Vect}(P_k) \text{ pour } k \in [\![0, n]\!].}$

Partie II - Étude d'une suite de variables aléatoires

6. (a)

On a : $Z_2(\Omega) = \{0, 1\}$.
$[Z_2 = 0]$ signifie qu'au second tirage, on n'obtient pas de nouveau numéro, c'est à dire que l'on retire le même numéro qu'au premier.
Donc $\boxed{\mathrm{P}(Z_2 = 0) = \frac{1}{n}}$ car les n boules sont équiprobables et $\boxed{\mathrm{P}(Z_2 = 1) = \frac{n-1}{n}.}$

(b)

Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout j de $[\![1, k]\!]$, si $[Y_k = j]$, on a déjà obtenus j numéros. Et il y en a donc $n - j$ que l'on a pas obtenus.

La probabilité d'obtenir un de ceux ci est donc $\boxed{\mathrm{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1]) = \frac{n-j}{n} = 1 - \frac{j}{n}}$

Comme,en k tirages on peut obtenir entre 1 et k numéros distincts, $[Y_k = j]_{j \in [\![1,k]\!]}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulle et :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z_{k+1} = 1) &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(Y_k = j)\, \mathrm{P}_{Y_k=j}(Z_{k+1} = 1) = \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathrm{P}(Y_k = j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(Y_k = j) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(Y_k = j) \boxed{= 1 - \frac{1}{n}\mathrm{E}(Y_k).} \end{aligned}$$

(c)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Z_k compte le nombre de numéro rajouté lors du $n^{iéme}$ tirage (0 ou 1)
Donc, $\sum_{j=1}^{k} Z_j$ est le nombre total de numéros ajouté en k tirage. Et en partant de 0, on a donc :

$$\boxed{Y_k = \sum_{j=1}^{k} Z_j.}$$

Donc, par linéarité de l'espérance, $E(Y_k) = \sum_{j=1}^{k} E(Z_j)$ et comme Z_j suit une loi de Bernoulli, $E(Z_j) = \mathrm{P}(Z_j = 1)$ d'où : $\boxed{\mathrm{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}([Z_j = 1]).}$

(d)

Procédons par récurrence forte :

- **Initialisation :** On a $\mathrm{P}(Z_1 = 1) = 1$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^0 = 1$.

  Donc on a bien $\boxed{\mathrm{P}(Z_1 = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^0.}$

- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{P}([Z_j = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1}$.

  Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z_{k+1} = 1) &= 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}(Z_j = 1) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1} \\
&\underset{i=j-1}{=} 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{i} = 1 - \frac{1}{n}\,\frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \boxed{= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k.}
\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^* : \mathrm{P}(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}}$.

(e)

Comme $\mathrm{P}(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n}\mathrm{E}(Y_k)$ on a donc $E(Y_k) = n\left[1 - \mathrm{P}(Z_{k+1} = 1)\right]$ et $\boxed{E(Y_k) = n\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right].}$

7. (a)

On a :

- $G_0 = \mathrm{P}(Y_0 = 0)\,X^0 \boxed{= 1.}$
- $G_1 = \mathrm{P}(Y_1 = 0)\,X^0 + \mathrm{P}(Y_1 = 1)\,X \boxed{= X}$ car $Y_1 = 1$.
- $G_2 = \mathrm{P}(Y_2 = 0)\,X^0 + \mathrm{P}(Y_2 = 1)\,X + \mathrm{P}(Y_2 = 2)\,X^2$.

  Il nous faut la loi de Y_2. On a : $[Y_2 = 1] = [Y_1 = 1] \cap [Z_2 = 0]$. Ainsi $\mathrm{P}(Y_2 = 1) = \mathrm{P}(Y_1 = 1)\,\mathrm{P}_{Y_1=1}(Z_2 = 0) = \frac{1}{n}$. De même, $[Y_2 = 2] = [Y_1 = 1] \cap [Z_2 = 1]$ et donc $\mathrm{P}(Y_2 = 2) = \mathrm{P}(Y_1 = 1)\,\mathrm{P}_{Y_1=1}(Z_2 = 1) = 1 - \frac{1}{n}$. Et nécessairement, il reste $P(Y_2 = 0) = 0$.

  Ainsi : $\boxed{G_2 = \frac{1}{n}X + \left(1 - \frac{1}{n}\right)X^2}$.

(b)

Pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout i de $[\![0, n]\!]$, $[Y_{k+1} = i]$ est réalisé si l'on a obtenus i numéros distincts au $k + 1^{me}$ tirage.
Cela arrive, ou bien quand on en a eu un de plus au $k + 1^{ième}$ et un de moins avant $(i - 1)$ ou bien quand on n'en a pas eu un de plus et qu'on avait déjà eu i numéros avant.
Formellement : $[Y_{k+1} = i] = ([Y_k = i - 1] \cap [Z_{k+1} = 1]) \cup ([Y_k = i] \cap [Z_{k+1} = 0])$ qui est une réunion disjointe.
Donc $\mathrm{P}(Y_{k+1} = i) = \mathrm{P}(Y_k = i - 1)\,\mathrm{P}_{[Y_k=i-1]}(Z_{k+1} = 1) + \mathrm{P}(Y_k = i)\,\mathrm{P}_{[Y_k=i]}(Z_{k+1} = 0)$ avec

$\mathrm{P}(Y_k = i-1) = 1 - \dfrac{i-1}{n}$ et $\mathrm{P}_{[Y_k=i]}(Z_{k+1}=0) = 1 - \mathrm{P}_{[Y_k=i]}(Z_{k+1}=1) = \frac{i}{n}$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{P}(Y_{k+1}=i) = \left(1 - \dfrac{i-1}{n}\right)\mathrm{P}(Y_k = i-1) + \dfrac{i}{n}\mathrm{P}(Y_k = i).}$

(c)

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
G_{k+1} &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(Y_{k+1}=i) X^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left[\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\mathrm{P}(Y_k=i-1) + \frac{i}{n}\mathrm{P}(Y_k=i)\right] X^i \\
&\underset{j=i-1}{=} \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Y_k=j) X^{j+1} - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} j\mathrm{P}(Y_k=j) X^{j+1} + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} i\mathrm{P}(Y_k=i) X^i
\end{aligned}$$

On fait alors apparaître la dérivée $G_k' = \sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(Y_k=j) X^{j-1}$:

$$\begin{aligned}
G_{k+1} &= X\sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Y_k=j) X^j - \frac{1}{n}X^2\sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(Y_k=j) X^{j-1} + \frac{1}{n}X\sum_{i=1}^{n} i\mathrm{P}(Y_k=i) X^{i-1} \\
&= XG_k + \frac{1}{n}\left(-X^2+X\right) G_k'
\end{aligned}$$

et on a bien $\boxed{G_{k+1} = \dfrac{1}{n}X(1-X)G_k' + XG_k}$

(d)

On a montré que $G_{k+1} = \varphi(G_k)$ pour tout entier k. La relation est analogue à celle d'une suite géométrique :
Pour $k=0$, on a : $G_0 = \varphi^0(G_0)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $G_k = \varphi^k(G_0)$. Dans ce cas, $G_{k+1} = \varphi(G_k) = \varphi\left(\varphi^k(G_0)\right) = \varphi^{k+1}(G_0)$.
Donc, $\boxed{\text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N} : G_k = \varphi^k(G_0)}$

8. (a)

Pour tout k de $\mathbb{N}$, $G_k(1) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(Y_k=j)$ donc $\boxed{G_k(1) = 1.}$
et $G_k'(X) = \sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(Y_k=j) X^{j-1}$ donc $G_k'(1) = \sum_{j=1}^{n} i\mathrm{P}(Y_k=j)$ et $\boxed{G_k'(1) = E(Y_k).}$

(b)

On reprend la relation : $G_{k+1} = \dfrac{1}{n}X(1-X)G_k' + XG_k$ valable pour tout pour tout k de $\mathbb{N}$.
On redérive pour faire apparaître $E(Y_{k+1})$:

$$\begin{aligned}
G_{k+1}' &= \frac{1}{n}(1-X)G_k' - \frac{1}{n}XG_k' + \frac{1}{n}X(1-X)G_k'' + G_k + XG_k' \text{ en } 1 \\
G_{k+1}'(1) &= -\frac{1}{n}G_k'(1) + G_k(1) + G_k'(1)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathrm{E}\left(Y_{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\mathrm{E}\left(Y_k\right)+1.}$

(c)

On pose $u_k=\mathrm{E}\left(Y_k\right)$. C'est une suite arithmético-géométrique.
Soit $c\in\mathbb{R}$. On a $c=\left(1-\frac{1}{n}\right)c+1\iff\frac{1}{n}c=1\iff c=n$. Posons alors $v_k=u_k-n$.
On a $v_{k+1}=\left(1-\frac{1}{n}\right)v_k$ géométrique et $v_k=\left(1-\frac{1}{n}\right)^k v_0$ avec $v_0=u_0-n=E\left(Y_0\right)-n=-n$.
On a donc $v_k=-n\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$ et $u_k=v_k+n$.
Ainsi $\boxed{E\left(Y_k\right)=-n\left(1-\frac{1}{n}\right)^k+n}$ ce qui est bien le résultat trouvé précédemment.

9. (a)

On a $\boxed{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}X^j(1-X)^{n-j}=(X+1-X)^n=1.}$

(b)

Pour tout j de $[\![0,n]\!]$, on a :

$$\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i\underset{k=i-j}{=}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-1)^kX^{k+j}=X^j\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-X)^k=X^j\left(1-X\right)^{n-j}.$$

On a donc $\boxed{P_j=\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i}$

(c)

Soit $k\in\mathbb{N}$. Travaillons dans la base $(P_0,\ldots,P_n)$ qui diagonalise φ. Pour cela, exprimons G_0 dans la base. On a :

$$G_0=1=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j$$

d'après la première sous-question. Ainsi :

$$\varphi^k\left(G_0\right)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\varphi^k\left(P_j\right).$$

Or, P_j est associé à la valeur propre $\dfrac{j}{n}$ donc $\varphi^k\left(P_j\right)=\left(\dfrac{j}{n}\right)^k P_j$ et

$$\varphi^k\left(G_0\right)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{j}{n}\right)^kP_j=\sum_{j=0}^{n}\left[\binom{n}{j}\left(\frac{j}{n}\right)^k\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i\right]$$

Puis en réindiçant et en permuttant les sommes :

$$\boxed{\varphi^k\left(G_0\right)=\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\left(\frac{j}{n}\right)^k\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}\right]X^i.}$$

(d)

On a pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $[\![0,n]\!]$: $\varphi^k(G_0) = G_k = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(Y_k = i) X^i$.
Donc $\mathrm{P}(Y_k = i)$ est la coordonnée sur X^i, dans la base canonique de G_k
Ainsi :

$$\mathrm{P}(Y_k = i) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j}$$

et il reste à transformer en factorielle les coefficients du binôme (valable car $0 \leq j \leq n$ et $0 \leq i-j \leq n-i$)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} &= \frac{n!}{j!\,(n-j)!} \frac{(n-j)!}{(i-j)!\,(n-i)!} \\
&= \frac{n!}{j!} \frac{1}{(i-j)!\,(n-i)!} \\
&= \frac{i!}{j!\,(i-j)!} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \binom{n}{i}\binom{i}{j}
\end{aligned}$$

avec $\binom{n}{i}$ constant par rapport à j. Ainsi : $\boxed{\mathrm{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.}$