

# RÉVISIONS - ANALYSE

## Exercice 1 - Ecricome ECS 2018 - Exercice 2

★

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

et on note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 6y.$$

On pose enfin  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

1. Vérifier que  $\varphi > 1$  et que les réels  $\varphi$  et  $\frac{-1}{\varphi}$  sont les solutions de l'équation  $x^2 - x - 1 = 0$ .
2. (a) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .  
 (b) Montrer que les seuls points critiques de  $f$  sont  $(\varphi, \varphi + 1)$  et  $(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1})$ .  
 (c) Étudier la nature des points critiques de  $f$ .
3. Montrer que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ .
4. (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier  $n \geq 2$ , elle calcule et renvoie la valeur du terme  $u_n$  de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

```

1  def suite(n):
    v = 0
    w = 1
    for k in range(2, n+1):
5     ...
    ...
    ...
    return ...
```

- (b) Justifier qu'il existe des réels  $\lambda$  et  $\mu$  que l'on déterminera, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \varphi^n + \mu \left( \frac{-1}{\varphi} \right)^n.$$

- (c) En déduire que la suite  $\left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right)_{n \geq 1}$  converge et déterminer sa limite.
5. On considère pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$ .
- (a) Montrer, sans chercher à calculer de somme, que la série de terme général  $\frac{1}{u_n u_{n+1}}$  converge.  
 (b) En déduire que la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  converge.  
 (c) En utilisant le résultat de la question 3, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

- (d) Montrer que :  $\varphi = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$ .

## Problème 2 - EML ECS 2017 - Problème 2

★★★

On définit la fonction réelle  $H$  d'une variable réelle  $x$  par  $H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt$ .

Dans tout le problème,  $I$  désigne l'intervalle  $]\frac{1}{2}, +\infty[$ .

### Partie I - Premières propriétés de la fonction $H$ .

1. Justifier que la fonction  $H$  est définie sur  $I$ .

2. Montrer que  $H$  est décroissante sur  $I$ .
3. (a) Calculer  $H(1)$ .  
 (b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :  $H(n) = 2n(H(n) - H(n+1))$ .  
 En déduire une expression de  $H(n+1)$  en fonction de  $n$  et de  $H(n)$ .  
 (c) Écrire un programme en `Python` qui, étant donné un entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , renvoie la valeur de  $H(n)$ .  
 (d) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, H(n) = \frac{(2n-2)! \pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}$ .

### Partie II - Étude de $H(x)$ lorsque $x$ tend vers $\frac{1}{2}$ .

4. (a) Montrer que la fonction  $\varphi : u \mapsto \frac{e^u - e^{-u}}{2}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 Préciser  $\varphi^{-1}(0)$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(t)$ .  
 (b) À l'aide du changement de variable  $t = \varphi(u)$ , montrer :

$$\forall x \in I, H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} du.$$

5. (a) Justifier :  $\forall u \in [0, +\infty[, e^u \leq e^u + e^{-u} \leq 2e^u$ .  
 (b) En déduire :  $\forall x \in I, \frac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \frac{4^x}{2(2x-1)}$ .
6. Déterminer la limite de  $H$  en  $\frac{1}{2}$  et un équivalent simple de  $H(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $\frac{1}{2}$ .

### Partie III - Étude de $H(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ .

7. (a) Montrer :  $\forall u \in [0, 1], \ln(1+u) \geq \frac{u}{2}$ .  
 (b) À l'aide d'une loi normale bien choisie, montrer que, pour tout  $x$  de  $I$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-xt^2/2} dt$  converge et calculer sa valeur.  
 (c) En déduire :  $\forall x \in I, 0 \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \int_0^1 e^{-xt^2/2} dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$ .  
 (d) Montrer :  $\forall x \in I, 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \frac{1}{2x-1}$ .  
 (e) En déduire la limite de  $H$  en  $+\infty$ .
8. On note, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \ln(H(n)) + \frac{\ln(n)}{2}$ .  
 (a) Déterminer un équivalent simple de  $u_{n+1} - u_n$  lorsque l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$ . On pourra utiliser le résultat obtenu à la question 3b.  
 (b) Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$  converge.  
 (c) En déduire l'existence d'un réel  $K$  strictement positif tel que :  $H(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}$ .
9. Donner enfin un équivalent simple de  $H(x)$  lorsque le réel  $x$  tend vers  $+\infty$  à l'aide de  $K$ .

### Partie IV - Étude d'une suite de variables aléatoires.

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{2}{\pi(1+t^2)} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$ .

10. Montrer que  $f$  est une densité.
11. On considère une variable aléatoire réelle  $X$  à densité, de densité  $f$ .  
 (a) Déterminer la fonction de répartition  $F_X$  de  $X$ .  
 (b) La variable  $X$  admet-elle une espérance ? Une variance ?
12. On considère une suite de variables aléatoires réelles  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  à densité, à valeurs strictement positives, mutuellement indépendantes, dont chacune a pour densité  $f$ .  
 On définit, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , les variables aléatoires  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$  et  $Z_n = \frac{n}{M_n}$ .  
 (a) Déterminer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , la fonction de répartition  $F_{M_n}$  de  $M_n$ .  
 (b) Justifier :  $\forall u \in ]0, +\infty[, \arctan(u) + \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}$  et  $\arctan(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ .  
 (c) Montrer alors, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^* : \forall x \in ]0, +\infty[, P(Z_n \leq x) = 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$ .  
 (d) En déduire que la suite de variables aléatoires  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on reconnaîtra la loi.

## Exercice 3 - ESC ECS 2007 - Exercice 2

★

On pose pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$  et  $J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$ .

1. Prouver la convergence de l'intégrale impropre appelée  $I_n$ .
2. Montrer que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et converge vers une limite notée  $\ell$ .
3. On pose, pour tout réel  $A > 0$  et tout entier naturel  $n$  non nul :  $I_n(A) = \int_0^A \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$ .

Par une intégration par parties, montrer que  $I_n(A) = \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n(I_n(A) - I_{n+1}(A))$ .

4. Dans cette question on montre que la limite de  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , notée  $\ell$  est nulle.
  - (a) À l'aide de la question 3, montrer que :  $\frac{J_n}{3n} = \frac{1}{3n \cdot 2^n} + (J_n - J_{n+1})$ .
  - (b) Justifier que les séries de terme général  $(J_n - J_{n+1})$  et  $\frac{1}{3n \cdot 2^n}$  sont convergentes.  
En déduire la nature de la série de terme général  $\frac{J_n}{3n}$ .
  - (c) Soit  $\beta$  un réel non nul et  $(a_n)$  une suite équivalente à  $\left(\frac{\beta}{3n}\right)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .  
Justifier que la série de terme général  $a_n$  diverge et en déduire par l'absurde que  $\ell = 0$ .

5. (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n} \leq \frac{1}{3n-1}$ .

(b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

6. (a) Grâce à la question 3, montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$ .

(b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2,  $I_n = I_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$ .

7. On admet que  $I_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ .

Compléter la fonction Python suivant pour qu'elle prenne un entier supérieur à 2 en paramètre et calcule et renvoie la valeur de  $I_n$  trouvée à la question 6b :

```

1 def integrale(n):
    I = ...
    for k in range(1, n):
        I = ...
5 return I

```