Correction - Révisions - Analyse

Exercice 1 - Ecricome ECS 2018 - Exercice 2 ⋆

1. On a $5 > 4$ et donc par stricte croissance de la racine sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{5} > 2$. Ainsi :

$$\boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} > 1.}$$

De plus, on a :

$$(X-\varphi)\left(X - \left[\frac{-1}{\varphi}\right]\right) = X^2 - \varphi X + \frac{X}{\varphi} - 1.$$

Or :

$$\varphi - \frac{1}{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2(1+\sqrt{5})} - \frac{2}{2(1+\sqrt{5})} = \frac{1+2\sqrt{5}+5-2}{2(1+\sqrt{5})} = 1.$$

Donc :

$$(X-\varphi)\left(X - \left[\frac{-1}{\varphi}\right]\right) = X^2 - X - 1.$$

Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ et } -\frac{1}{\varphi} \text{ sont bien les solutions de } x^2 - x - 1 = 0.}$

2. (a) $\boxed{f \text{ est une fonction polynomiale sur } \mathbb{R}^2 \text{ et est donc } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$

(b) f est $\mathcal{C}^2$ donc en particulier f admet des dérivées partielles en tout point.
Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \partial_1 f(x,y) & = & 6x^2 - 6y, \\ \partial_2 f(x,y) & = & -6x + 6y - 6. \end{array}$$

Ainsi, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{array}{rcl}
(x,y) \text{ point critique de } f & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 6x^2 - 6y & = & 0 \\ -6x + 6y - 6 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y & = & 0 \\ -x + y - 1 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Leftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - x - 1 & = & 0 \\ -x + y - 1 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{\varphi} \\ y \;=\; x+1 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \varphi \\ y & = & \varphi + 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{\varphi} \\ y & = & -\frac{1}{\varphi} + 1 = \frac{\varphi - 1}{\varphi} \end{array} \right. .
\end{array}$$

Or φ est solution de $x^2 - x - 1 = 0$ donc $\varphi = \varphi^2 - 1 = (\varphi-1)(\varphi+1)$. Puis :

$$\boxed{(x,y) \text{ point critique de } f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \varphi \\ y & = & \varphi + 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{\varphi} \\ y & = & \frac{1}{\varphi+1} \end{array} \right. .}$$

(c) f est $\mathcal{C}^2$ donc admet des dérivées secondes en tout point. De plus, le théorème de Schwarz s'applique et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y)$.
On a de plus :

$$\begin{array}{rcl} \partial^2_{1,1} f(x,y) & = & 12x \\ \partial^2_{1,2} f(x,y) & = & -6 \\ \partial^2_{2,2} f(x,y) & = & 6. \end{array}$$

Ainsi la matrice hessienne de f en (x,y) est :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

En particulier, en $(\varphi, \varphi+1)$, on a :

$$\boxed{\nabla^2 f(\varphi,\varphi+1) = \begin{pmatrix} 12\varphi & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6(1+\sqrt{5}) & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

et en $\left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1}\right)$, on a :

$$\boxed{\nabla^2 f\left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{12}{\varphi} & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Ces deux matrices sont symétriques (le théorème de Schwarz le garantissait) et donc sont diagonalisables. Déterminons leurs spectres.

Commençons par remarquer que pour toute matrice A, on a :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(6A) \Leftrightarrow \frac{\lambda}{6} \in \mathrm{Sp}(A).$$

Cela permet de simplifier par 6 tous les calculs.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow (1+\sqrt{5}-\lambda)\times(1-\lambda) - (-1)\times(-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - (2+\sqrt{5})\lambda + \sqrt{5} = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation de degré 2 est :

$$\Delta = (2+\sqrt{5})^2 - 4\sqrt{5} = 4+5+4\sqrt{5}-4\sqrt{5} = 9.$$

Donc, ces racines sont :

$$\lambda_1 = \frac{2+\sqrt{5}+\sqrt{9}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2} = 2+\varphi \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{2+\sqrt{5}-\sqrt{9}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(\varphi,\varphi+1)) = \left\{6(2+\varphi), \frac{6}{\varphi}\right\}.}$$

Les valeurs sont toutes deux strictement positives et donc $\boxed{f \text{ admet un minimum local en } (\varphi,\varphi+1).}$

On trouve de manière tout à fait similaire :

$$\boxed{\mathrm{Sp}\left(\nabla^2 f\left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1}\right)\right) = \left\{-6\varphi, 6\left(2-\frac{1}{\varphi}\right)\right\}.}$$

Comme $\varphi > 1$, on a $6\left(2-\frac{1}{\varphi}\right) > 0$. Et donc $\boxed{f \text{ admet un point selle en } \left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1}\right).}$

3. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   - **Initialisation :** pour $n = 0$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 = 0 \\ u_{n+1} &= u_1 = 1 \\ u_{n+2} &= u_2 = u_1 + u_0 = 1. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = 0 \times 1 - 1^2 = -1}$$

ce qui est $\boxed{\text{bien égal à } (-1)^{n+1} = (-1)^{0+1}.}$

- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1}u_{n+3} - u_{n+2}^2 &= u_{n+1}(u_{n+2} + u_{n+1}) - u_{n+2}(u_{n+1} + u_n) \\ &= u_{n+1}u_{n+2} + u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_{n+1} - u_n u_{n+2} \\ &= u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} \\ &= -(-1)^{n+1} \\ &= \boxed{(-1)^{(n+1)+1}.} \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.}$$

4. (a)

```python
def suite(n):
    v = 0
    w = 1
    for k in range(2,n+1):
        t = w
        w = v + w
        v = t
    return w
```

(b) (u_n) est une suite récurrente double. Son équation caractéristique est :

$$r^2 = r + 1$$

qui est équivalente à $r^2 - r - 1 = 0$ et donc on connaît les solutions à savoir φ et $-\frac{1}{\varphi}$. Ces solutions sont distinctes donc il existe λ et μ réels tels que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\varphi^n + \mu\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n.}$$

De plus, pour $n = 0$ et $n = 1$, cela donne :

$$\left\{\begin{aligned} \lambda\varphi^0 + \mu\left(\tfrac{-1}{\varphi}\right)^0 &= 0, \\ \lambda\varphi^1 + \mu\left(\tfrac{-1}{\varphi}\right)^1 &= 1. \end{aligned}\right.$$

On résout :

$$\left\{\begin{aligned} \lambda\varphi^0 + \mu\left(\tfrac{-1}{\varphi}\right)^0 &= 0 \\ \lambda\varphi^1 + \mu\left(\tfrac{-1}{\varphi}\right)^1 &= 1 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \lambda + \mu &= 0 \\ \tfrac{\lambda\varphi^2 - \mu}{\varphi} &= 1 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \mu &= -\lambda \\ \tfrac{\lambda\varphi^2 + \lambda}{\varphi} &= 1 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \mu &= -\lambda \\ \lambda\tfrac{\varphi^2 + 1}{\varphi} &= 1 \end{aligned}\right.$$

Or :

$$\frac{\varphi^2 + 1}{\varphi} = \frac{(\varphi + 1) + 1}{\varphi} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{(5+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{5 - 4\sqrt{5} - 5}{1 - 5} = \sqrt{5}.$$

Donc :

$$\boxed{\begin{cases} \lambda\varphi^0 + \mu\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^0 & = & 0 \\ \lambda\varphi^1 + \mu\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^1 & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu & = & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \lambda & = & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}.}$$

D'où finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n.}$$

(c) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n} = \frac{\varphi^{n+1} - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+1}}{\varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n} = \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} \times \frac{1-\left(\frac{-1}{\varphi^2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{-1}{\varphi^2}\right)^n}.$$

Or $\varphi > 1$ donc :

$$\left(\frac{-1}{\varphi^2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge bien et :

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi.}$$

5. (a) Toujours grâce à $\varphi > 1$, on a $-1 < -\frac{1}{\varphi} < 0$ et :

$$u_n u_{n+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{5}\varphi^{2n+1}.$$

Au voisinage de $+\infty$, on a donc $\frac{1}{u_n u_{n+1}}$ positif. De plus :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5}{\varphi^{2n+1}}$$

est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{\varphi^2}$ inférieure à 1 (en valeur absolue). Cette série converge.

Donc d'après le critère d'équivalence du théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$\boxed{\text{la série } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_n u_{n+1}} \text{ converge.}}$

(b) $(u_n u_{n+1})$ est en fait toujours positive, par récurrence immédiate. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \frac{1}{u_n u_{n+1}} = \left|\frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}}\right|.$$

Ainsi la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$ est absolument convergente donc convergente.

Donc $\boxed{\text{la suite } (S_n) \text{ (qui est la suite des sommes partielles) converge.}}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}u_{n+2}} \\ &= \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_{n+1}u_{n+2}} \\ &= \boxed{\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.} \end{aligned}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n}(S_{k+1}-S_k)=S_{n+1}-S_1$$

car c'est une somme télescopique et :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}\right)=\frac{u_1}{u_2}-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

pour la même raison.
Donc d'après l'égalité de la question précédente, on a :

$$S_{n+1}-S_1=\frac{u_1}{u_2}-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$$

ce qui donne en mettant les valeurs :

$$S_{n+1}-1=1-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

En passant à la limite, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{u_ku_{k+1}}+1=1-\frac{1}{\varphi}.$$

Donc :

$$1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{u_ku_{k+1}}=1+\frac{1}{\varphi}.$$

Or :

$$1+\frac{1}{\varphi}=\frac{\varphi+1}{\varphi}=\frac{\varphi^2}{\varphi}=\varphi.$$

D'où :

$$\boxed{\varphi=1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{u_ku_{k+1}}.}$$

Problème 2 - EML ECS 2017 - Problème 2 ⋆⋆⋆

Partie I - Premières propriétés de la fonction H.

1. La fonction $t\mapsto \frac{1}{(1+t^2)^x}$ est continue syr $\mathbb{R}_+$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Donc l'intégrale est généralisée en $+\infty$ uniquement.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :
   $$\frac{1}{(1+t^2)^x}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^{2x}}.$$
   Par critère d'équivalence, les intégrales de fonctions positives :
   $$\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2x}}\mathrm{d}t$$
   ont même nature.
   Or $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2x}}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann et converge si et seulement si $2x>1$, c'est-à-dire si et seulement si $x\in I$.
   Donc $\boxed{H \text{ est bien définie sur } I.}$

2. **Remarque :** attention, on ne sait pas si H est dérivable (d'ailleurs comment calculerait-on la dérivée ?) et donc on ne peut pas s'appuyer là-dessus pour étudier les variations.
Soient $x, y \in I$ avec $x \geqslant y$. On a :

$$\begin{aligned} H(x) - H(y) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^y}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+t^2)^x} - \frac{1}{(1+t^2)^y} \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)^y - (1+t^2)^x}{(1+t^2)^{x+y}}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Le dénominateur est positif. Il faut donc étudier le signe du numérateur. La fonction $z \mapsto (1+t^2)^z$ à $t \in \mathbb{R}_+$ fixé est croissante car $1 + t^2 \geqslant 1$. Donc :

$$(1+t^2)^x \geqslant (1+t^2)^y.$$

Donc par croissance de l'intrégale, on a :

$$H(x) - H(y) \leqslant 0.$$

Et donc $\boxed{H \text{ est décroissante sur } I.}$

3. (a) On a :

$$H(1) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

On a pour $A > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t &= [\arctan(t)]_0^A \\ &= \underbrace{\arctan(A)}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arctan(0)}_{=0}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{H(1) = \frac{\pi}{2}.}$$

(b) Soit $A > 0$. On pose :

$$u(t) = \frac{1}{(1+t^2)^x} \quad \text{et} \quad v(t) = t.$$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et donc par intégration par partie, on a pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_0^A \underbrace{1}_{=v'(t)} \times \underbrace{\frac{1}{(1+t^2)^n}}_{=u(t)} \mathrm{d}t}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} H(n)} &= \left[\underbrace{t}_{=v(t)} \times \underbrace{\frac{1}{(1+t^2)^n}}_{=u(t)} \right]_0^A - \int_0^A \underbrace{t}_{=v(t)} \times \underbrace{(-n) \times \frac{2t}{(1+t^2)^{n+1}}}_{=u'(t)} \\ &= \frac{A}{(1+A^2)^x} + 2n \int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t \\ &= \frac{A}{(1+A^2)^x} + 2n \int_0^A \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\frac{A}{(1+A^2)^x}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0} + 2n \left(\underbrace{\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} H(n)} - \underbrace{\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^{2n+1}}\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} H(n+1)} \right). \end{aligned}$$

En prenant la limite $A \to +\infty$, on obtient alors :

$$\boxed{H(n) = 2n(H(n) - H(n+1)).}$$

On en déduit :

$$\boxed{H(n+1) = \frac{2n-1}{2n} H(n).}$$

(c)

```python
def H(n):
    h = np.pi/2
    for i in range(1,n):
        h = h * (2*i-1)/(2*i)
    return h
```

(d) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$:

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $H(1) = frac\pi 2$. On a également :

$$\frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} = \frac{0!\pi}{2^1(0!)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

  Donc, on a bien :

$$\boxed{H(1) = \frac{(2\times 1-2)!\pi}{2^{2\times 1-1}((1-1)!)^2}.}$$

- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose :

$$H(n) = \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}.$$

  On a alors :

$$\begin{aligned} H(n+1) &= \frac{2n-1}{2n} \times H(n) \\ &= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} \\ &= frac(2n-1)2n(2n)^2 \times \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} \\ &= frac(2n-1)2n2^2n^2 \times \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} \\ &= \frac{(2n)!\pi}{2^{2n-1+2}(n(n-1)!)^2} \\ &= \boxed{\frac{(2(n+1)-2)!\pi}{2^{2(n+1)-1}((n+1-1)!)^2}.} \end{aligned}$$

Donc, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\boxed{H(n) = \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}.}$$

Partie II - Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

4. (a) La fonction φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles. On a pour $u \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(u) = \frac{\mathrm{e}^u - (-\mathrm{e}^{-u})}{2} = \frac{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}{2} > 0.$$

Donc φ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a :

$$\lim_{u\to+\infty}\varphi(u)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{u\to-\infty}\varphi(u)=-\infty.$$

Donc d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\varphi \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}.}$
On a de plus comme conséquence de ce théorème :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}\varphi^{-1}(t)=+\infty.}$$

On remarque également que $\varphi(0)=0$ donc :

$$\boxed{\varphi^{-1}(0)=0.}$$

(b) On a vu que φ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante. Donc le changement de variable est licite.
En posant $t=\varphi(u)$ (ce qui est équivalent à $u=\varphi^{-1}(t)$), on a $\mathrm{d}t=\varphi'(u)\mathrm{d}u$ et on trouve que les deux intégrales :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+(\varphi(u))^2)^x}\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

ont même nature. Comme la première est $H(x)$, les deux convergent et on a l'égalité :

$$H(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+(\varphi(u))^2)^x}\varphi'(u)\mathrm{d}u.$$

On calcule :

$$\begin{aligned}
H(x) &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+(\varphi(u))^2)^x}\varphi'(u)\mathrm{d}u\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+\left[\frac{\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^{-u}}{2}\right]^2\right)^x}\frac{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}{2}\mathrm{d}u\\
&= \int_0^{+\infty}\left(\frac{4}{4+\mathrm{e}^{2u}-2\mathrm{e}^u\mathrm{e}^{-u}+\mathrm{e}^{-2u}}\right)^x\frac{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}{2}\mathrm{d}u\\
&= \frac{4^x}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\mathrm{e}^{2u}+2+\mathrm{e}^{-2u})^x}(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})\mathrm{d}u\\
&= \frac{4^x}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{((\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})^2)^x}(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})\mathrm{d}u\\
&= \boxed{\frac{4^x}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})^{2x-1}}\mathrm{d}u.}
\end{aligned}$$

5. (a) Pour tout $u\geqslant 0$, on a par croissance de l'exponentielle :

$$\mathrm{e}^{-u}\leqslant 1\leqslant \mathrm{e}^u.$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}\leqslant 2\mathrm{e}^u.}$$

Et par positivité de l'exponentielle, on a :

$$\boxed{\mathrm{e}^u\leqslant \mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}.}$$

(b) Par croissance de l'intégrale, on en déduit :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(2\mathrm{e}^u)^{2x-1}}\mathrm{d}u\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})^{2x-1}}\mathrm{d}u\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\mathrm{e}^u)^{2x-1}}\mathrm{d}u.$$

Or pour $\lambda > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda u}\mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda}.$$

Ainsi pour $x \in I$:

$$\frac{1}{2^{2x-1}} \times \frac{1}{2x-1} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})^{2x-1}}\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2x-1}.$$

Puis :

$$\frac{4^x}{2} \times \frac{1}{2^{2x-1}} \times \frac{1}{2x-1} \leqslant \frac{4^x}{2} \times \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})^{2x-1}}\mathrm{d}u \leqslant \frac{4^x}{2} \times \frac{1}{2x-1}.$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\frac{1}{2x-1} \leqslant H(x) \leqslant \frac{4^x}{2(2x-1)}.}$$

6. On a par minoration, comme $\frac{1}{2x-1} \xrightarrow[x\to+\frac{1}{2}]{} +\infty$:

$$\boxed{H(x) \xrightarrow[x\to+\frac{1}{2}]{} +\infty.}$$

De plus, en multipliant tout par $2x-1$, on obtient :

$$1 \leqslant (2x-1)H(x) \leqslant \underbrace{\frac{4^x}{2}}_{\xrightarrow[x\to+\frac{1}{2}]{}1}$$

et donc par encadrement :

$$\lim_{x\to+\frac{1}{2}} (2x-1)H(x) = 1$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{H(x) \underset{x\to+\frac{1}{2}}{\sim} \frac{1}{2x-1}.}$$

Partie III - Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

7. (a) Posons :

$$\psi : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R}, \\ u & \mapsto & \ln(1+u) - \frac{u}{2}. \end{cases}$$

Clairement ψ est dérivable sur $[0,1]$ et pour $u \in [0,1]$, on a :

$$\psi'(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{2} = \frac{2-(1+u)}{2(1+u)} = \frac{1-u}{2(1+u)}.$$

Donc sur $[0,1]$, ψ' est positive. Donc ψ est croissante sur cet intervalle et pour tout $u \in [0,1]$, on a :

$$\underbrace{\psi(u)}_{=\ln(1+u)-\frac{u}{2}} \geqslant \underbrace{\psi(0)}_{=0}.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\ln(1+u) \geqslant \frac{u}{2}.}$$

(b) Soit $x \in I$. La loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{x}\right)$ admet pour densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times \frac{1}{x}}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\times\frac{1}{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}.$$

Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Puis, on a par parité :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2} 2\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{x}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\mathrm{d}t}_{=1} \\ &= \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2x}}}\end{aligned}$$

et donc l'intégral est bien convergente.

(c) Ainsi pour $x \in I$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}}_{\geqslant 0}\mathrm{d}t$$

d'après la relation de Chasles et donc par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\mathrm{d}t}_{=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}}.}$$

On a également par positivité de l'intégrale :

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t.}$$

Pour $x \in I$, on a $x > \frac{1}{2}$ et on a donc $x > 0$. Ainsi pour tout $u \in [0,1]$, on a :

$$x\ln(1+u) \geqslant \frac{xu}{2}.$$

En particulier, pour $u = t^2$ avec $t \in [0,1]$, on a :

$$x\ln(1+t^2) \geqslant \frac{xt^2}{2}.$$

Puis en passant à l'exponentielle (croissante) et à l'inverse (décroissante) :

$$\frac{1}{(1+t^2)^x} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}.$$

Donc par croissance de l'intégrale, on en déduit :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{xt^2}{2}}\mathrm{d}t.}$$

(d) Par positivité de l'intégrale, on a encore :

$$\boxed{0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t.}$$

Puis pour tout $t \geqslant 1$, on a :

$$1 + t^2 \geqslant t^2.$$

Et donc :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x}}\mathrm{d}t.$$

Or pour $A > 1$, on a :

$$\int_1^A \frac{1}{t^{2x}}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-2x}}{1-2x}\right]_1^A = \frac{1}{2x-1} - \frac{A^{1-2x}}{2x-1} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2x-1}.$$

Et donc :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2x-1}.}$$

(e) On a donc pour tout $x \in I$:

$$0 \leqslant \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t}_{=H(x)} \leqslant \underbrace{\sqrt{\frac{\pi}{2x}} + \frac{1}{2x-1}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}.$$

Donc par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} H(x) = 0.}$$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \ln(H(n+1)) + \frac{\ln(n+1)}{2} - \ln(H(n)) - \frac{\ln(n)}{2}\\
&= \ln\left(\frac{H(n+1)}{H(n)}\right) + \frac{\ln\frac{n+1}{n}}{2}\\
&= \ln\frac{2n-1}{2n} + \frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{n}\\
&= \ln\left(\frac{2n-1}{2n}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)\\
&= \ln\left(\left[1-\frac{1}{2n}\right]\times\left[1+\frac{1}{n}\right]^{\frac{1}{2}}\right)\\
&= \ln\left(\left[1-\frac{1}{2n}\right]\times\left[1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right)\\
&= \ln\left(1-\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{8n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= -\frac{3}{8n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{-\frac{3}{8n^2}.}
\end{aligned}$$

(b) Comme $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{8n^2}$, au voisinage de $+\infty$, les deux termes sont de même signe (ici négatif). Donc, par critère d'équivalence du théorème de comparaison des séries à termes de signes constants, la série de terme générale $u_{n+1}-u_n$ est de même nature que la série de terme générale $-\frac{3}{8n^2}$. Or $\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{3}{8n^2}$ converge car c'est, à un facteur près, une série de Riemann convergente ($2 > 1$).

Donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n) \text{ converge.}}$

(c) Or pour $N \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N}(u_{n+1}-u_n) = u_{N+1} - u_1.$$

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)$ converge si et seulement si la suite $(u_{N+1})_{N\geqslant 1}$ converge. Comme la série converge, on peut noter $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de (u_n).

On a donc :

$$H(n) = \exp\left(\ln(H(n))\right) = \exp\left(u_n - \frac{\ln(n)}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{\sqrt{n}}.$$

On a alors :

$$\frac{H(n)\sqrt{n}}{\mathrm{e}^{\ell}} = \mathrm{e}^{u_n-\ell} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Donc :

$$\boxed{H(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}}$$

où $\boxed{K = \mathrm{e}^{\ell} > 0.}$

9. Soit $x > 1$. Posons $n_x = \lfloor x \rfloor$. Par décroissance de H, on a :

$$H(n_x) \geqslant H(x) \geqslant H(n_x+1).$$

Puis on divise par $\frac{K}{\sqrt{x}} > 0$:

$$\frac{\sqrt{x}}{K}H(n_x) \geqslant \frac{\sqrt{x}}{K}H(x) \geqslant \frac{\sqrt{x}}{K}H(n_x+1).$$

On peut alors insérer l'équivalent de $H(n)$ connu :

$$\frac{\sqrt{x}}{K} \times \frac{K}{\sqrt{n_x}} \times \frac{\sqrt{n_x}}{K}H(n_x) \geqslant \frac{\sqrt{x}}{K}H(x) \geqslant \frac{\sqrt{x}}{K} \times \frac{K}{\sqrt{n_x+1}} \times \frac{\sqrt{n_x+1}}{K}H(n_x+1)$$

que l'on peut encore écrire :

$$\sqrt{\frac{x}{n_x}}\underbrace{\frac{H(n_x)}{\frac{K}{\sqrt{n_x}}}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1} \geqslant \frac{H(x)}{\frac{K}{\sqrt{x}}} \geqslant \sqrt{\frac{x}{n+1}}\underbrace{\frac{H(n_x+1)}{\frac{K}{\sqrt{n_x+1}}}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1}.$$

où on a supposé et on vérifiera juste après que $n_x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Il nous faut donc déterminer les limites de $\sqrt{\frac{x}{n_x}}$ et $\sqrt{\frac{x}{n_x+1}}$.

On a :

$$\underbrace{\lfloor x \rfloor}_{=n_x} \leqslant x < \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{=n_x} +1$$

Donc $n_x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ par minoration.

Puis :

$$1 \leqslant \frac{x}{n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

et par encadrement puisque :

$$\frac{x}{n_x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

De même, en divisant plutôt par $n+1$, on obtient :

$$\frac{x}{n_x+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi, on a par encadrement :

$$\frac{H(x)}{\frac{K}{\sqrt{x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{H(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}}.}$$

Partie IV - Étude d'une suite de variables aléatoires.

10. On vérifie les propriétés suivantes :
    - f est positive par définition,
    - f est continue sauf éventuellement en 0,
    - l'intégrale de f est donnée par :

    $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$

    L'intégrale n'est véritablement généralisée qu'en $+\infty$.
    De plus, pour $A > 0$, on a :

    $$\begin{aligned} \int_0^A \frac{2}{\pi(1+t^2)}\mathrm{d}t &= \frac{2}{\pi}\int_0^A \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\arctan(t)\right]_0^A \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\arctan(A)}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arctan(0)}_{=0}\right) \\ &\xrightarrow[A\to+\infty]{} 1. \end{aligned}$$

    Donc :

    $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1.}$$

    Donc $\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité.}}$

11. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

    $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

    Si $x \leqslant 0$ alors :

    $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0.$$

    Si $x > 0$ alors :

    $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{2}{\pi(1+t^2)}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\arctan(x).$$

    Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

    $$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{2}{\pi}\arctan(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

    (b) X admet une espérance si et seulement si :

    $$\int_{-\infty}^{+infty} tf(t)\mathrm{d}x$$

    converge absolument. Or, on a sous réserve de convergence :

    $$\int_{-\infty}^{+infty} tf(t)\mathrm{d}x = \int_0^{+infty} \frac{2t}{\pi(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$

    Et :

    $$\frac{2t}{\pi(1+t^2)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2}{t}.$$

    Or $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann divergente. Donc par critère d'équivalence (d'une intégrale d'une fonction positive), $\int_0^{+infty} \frac{2t}{\pi(1+t^2)}\mathrm{d}t$ diverge.

    Donc $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

    A fortiori, $\boxed{X \text{ n'admet pas de variance.}}$

12. (a) M_n est bien une variable aléatoire car $\max : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} F_{M_n}(x) & = & P(M_n \leqslant x) \\ & = & P(\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x) \\ & = & P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant x]\right) \\ & = & \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leqslant x) \text{ (indépendance)} \\ & = & F_X(x)^n \text{ (loi commune)} \\ & = & \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^n & \text{si } x > 0 \end{cases}} \end{array}$$

Remarquons que F_{M_n} est clairement $\mathcal{C}^1$ (sauf éventuellement en 0) et continue sur $\mathbb{R}$ en entier (calcul de limite simple en 0). Donc $\boxed{M_n \text{ est à densité.}}$

(b) On pose :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \arctan(u) + \arctan\left(\frac{1}{u}\right) \end{array} \right. .$$

ψ est dérivable par opérations sur les fonctions usuelles. On a pour $u \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\psi'(u) = \frac{1}{1+u^2} + \frac{-\frac{1}{u^2}}{1+\frac{1}{u^2}} = \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{u^2+1} = 0.$$

Donc ψ est constante sur $\mathbb{R}_+^\star$. De plus, on a :

$$\psi(1) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc pour tout $u \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\boxed{\arctan(u) + \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

Comme arctan est $\mathcal{C}^1$, on peut faire un développement de Taylor à l'ordre 1 en 0. On trouve :

$$\arctan(u) = \underbrace{\arctan(0)}_{=0} + \underbrace{\arctan'(0)}_{=\frac{1}{1+0^2}=1} u + \underset{u \to 0}{o}(u).$$

Et donc on a bien :

$$\boxed{\arctan(u) \underset{u \to 0}{\sim} u.}$$

(c) Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
P(Z_n \leqslant x) &= P\left(\frac{n}{M_n} \leqslant x\right) \\
&= P\left(\frac{n}{x} \leqslant M_n\right) \\
&\quad \text{(car } M_n > 0 \text{ et } x > 0\text{)} \\
&= 1 - P\left(M_n < \frac{n}{x}\right) \\
&= 1 - P\left(M_n \leqslant \frac{n}{x}\right) \\
&\quad \text{(car } M_n \text{ est à densité)} \\
&= 1 - \left(\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{x}\right)\right)^n \\
&= 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \\
&= \boxed{1 - \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n.}
\end{aligned}$$

(d) Quand $x \leqslant 0$, on a clairement $P(Z_n \leqslant x) = 0$.
Pour $x > 0$, on a :

$$1 - \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right).$$

On a $\arctan\left(\frac{x}{n}\right) \sim \frac{x}{n}$ qui tend vers 0 donc :

$$\ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi} \times \frac{x}{n}$$

puis :

$$n \ln\left(1 - \arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{2x}{\pi}.$$

Donc :

$$1 - \left(1 - \arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{2x}{\pi}}.$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(Z_n \leqslant x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{2x}{\pi}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On pose :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{2x}{\pi}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

qui est continue sur $\mathbb{R}$ et qui est la fonction de répartition de $\mathcal{E}\left(\frac{2}{\pi}\right)$.
On a en tout point de continuité de F :

$$\boxed{P(Z_n \leqslant x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F(x).}$$

Donc $\boxed{(Z_n) \text{ converge en loi vers la loi } \mathcal{E}\left(\frac{2}{\pi}\right).}$

Exercice 3 - ESC ECS 2007 - Exercice 2 ⋆

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x^3)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Donc l'intégrale est généralisée en $+\infty$.
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:
   $$\frac{1}{(1+x^3)^n} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n}}.$$
   Or $n \geqslant 1$, donc $3n \geqslant 3 > 1$. Donc l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3n}}\mathrm{d}x$ converge.
   Par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, $\boxed{I_n \text{ converge.}}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a :
   $$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^n}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{(1+x^3)^{n+1}} - \frac{1}{(1+x^3)^n}\right)\mathrm{d}x \\ &\quad \text{(linéarité de l'intégration sur un segment)} \\ &= \int_0^1 \frac{1-(1+x^3)}{(1+x^3)^{n+1}}\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \underbrace{\frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}}_{\geqslant 0}\mathrm{d}x \\ &\leqslant 0 \text{(positivité de l'intégrale)} \end{aligned}$$
   Donc $J_{n+1} \leqslant J_n$ et $\boxed{(J_n) \text{ est décroissante.}}$
   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n \geqslant 0$, (J_n) est minorée et d'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{(J_n) \text{ converge vers une limite réelle } \ell.}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soit $A > 0$. On pose :
   $$u(x) = \frac{1}{(1+x^3)^n} \quad \text{et} \quad v(x) = x.$$
   u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Donc on a par intégration par parties :
   $$\begin{aligned} I_n(A) &= \int_0^A \frac{1}{(1+x^3)^n}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^A \underbrace{1}_{=v'(x)} \times \underbrace{\frac{1}{(1+x^3)^n}}_{=u(x)}\mathrm{d}x \\ &= \left[\underbrace{x}_{=v(x)} \times \underbrace{\frac{1}{(1+x^3)^n}}_{=u(x)}\right]_0^A - \int_0^A \underbrace{x}_{=v(x)} \times \underbrace{(-n)\frac{3x^2}{(1+x^3)^{n+1}}}_{=u'(x)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\int_0^1 \frac{1+x^3-1}{(1+x^3)^{n+1}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\left(\int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^n}\mathrm{d}x - \int_0^A \frac{1}{(1+x^3)^n}\mathrm{d}x\right) \\ &= \boxed{\frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n(I_n(A) - I_{n+1}(A)).} \end{aligned}$$
4. (a) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $I_n(1) = J_n$. Donc :
   $$J_n = \frac{1}{2^n} + 3n(J_n - J_{n+1}).$$

En divisant tout par $3n$, on obtient :

$$\boxed{\frac{J_n}{3n} = \frac{1}{3n \times 2^n} + (J_n - J_{n+1}).}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}(J_k - J_{k+1}) = J_1 - J_{n+1}$$

car c'est une somme télescopique. La suite de ces valeurs convergent donc si et seulement si (J_n) converge (ce qui est le cas).

Donc $\boxed{\text{la série de terme général } (J_n - J_{n+1}) \text{ converge.}}$

Par ailleurs, pour $n \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{3n \times 2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ est une série géoémtrique bien connue (sa somme vaut 1) convergente.

Donc d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3k \times 2^k} \text{ converge.}}$

Par somme, on en déduire que $\boxed{\text{la série de terme général } \frac{J_n}{3n} \text{ est convergente.}}$

(c) D'après le critère d'équivalence du théorème de comparaison des séries à termes de signes constants (au voisinage de $+\infty$), la série des (a_n) est de même nature que la série des $\frac{\beta}{3n}$.

Or la série de terme général $\frac{\beta}{3n}$ est, à un non-nul facteur près, la série harmonique. Donc elle diverge.

Ainsi $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverge.}}$

Supposons maintenant par l'absurde que $\ell \neq 0$. On a donc $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$. Donc :

$$\frac{J_n}{3n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ell}{3n}$$

avec $\ell \neq 0$. Donc la série des $\frac{J_n}{3n}$ diverge.

Mais on vient de prouver le contraire. Donc c'est absurde et nécessairement :

$$\boxed{\ell = 0.}$$

5. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$1 + x^3 \geqslant x^3.$$

Donc par croissance de l'intégrale (et sous réserve de convergence) :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^3)^n}\mathrm{d}x.$$

Or pour $A > 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_1^A \frac{1}{(x^3)^n}\mathrm{d}x &= \int_1^A x^{-3n}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^{-3n+1}}{-3n+1}\right]_1^A \\
&= \frac{1}{3n-1} - \underbrace{\frac{A^{1-3n}}{3n-1}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}0}.
\end{aligned}$$

Donc l'intégrale converge et on a bien :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{3n-1}.}$$

(b) On a pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^n}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\mathrm{d}x \\ &= J_n + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Or :

$$J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et on a :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{3n-1}.$$

Donc par encadrement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, par somme :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

6. (a) Commençons par réordonner les termes de l'équation trouvée plus haut :

$$\begin{aligned} & I_n(A) = \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n(I_n(A) - I_{n+1}(A)) \\ \Leftrightarrow\quad & I_n(A) - 3nI_n(A) = \frac{A}{(1+A^3)^n} - 3nI_{n+1}(A)) \\ \Leftrightarrow\quad & (1-3n)I_n(A) = \frac{A}{(1+A^3)^n} - 3nI_{n+1}(A)). \end{aligned}$$

En prenant la limite lorsque $A \to +\infty$, on a alors :

$$(1-3n)I_n = 0 - 3nI_{n+1}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n.}$$

(b) Par récurrence immédiate :

- **Initialisation :** pour $n = 2$, l'égalité est l'égalité précédente avec $n = 2$.
- **Hérédite :** soit $n \geqslant 2$. On suppose que :

$$I_n = I_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{3n-1}{3n} I_n \\ &= \frac{3n-1}{3n} I_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k} \\ &= \boxed{I_1 \prod_{k=1}^{(n+1)-1} \frac{3k-1}{3k}.} \end{aligned}$$

7.

```python
def integrale(n):
    I = 2*np.pi / (3*np.sqrt(3))
    for k in range(1,n):
        I = I * (3*k-1)/(3*k)
    return I
```