CORRECTION HEC/ESSEC
Année 2022/2023

Problème :
Densités, intégrales impropres, séries, bilinéaire, suites, fonctions à plusieurs variables, python

1) a) Notons f une densité de X et considérons n un entier naturel. Comme $t \mapsto t^n f(t)$ est continue sur l'intervalle $X(\Omega) = [0,1]$, on sait que $\mathbb{E}(X^n)$ existe. On a alors :
$\mathbb{E}(X^n) = \int_0^1 t^n f(t)dt = \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$

$$\boxed{\text{Le moment d'ordre } n \text{ de } X \text{ est } \frac{1}{n+1}.}$$

b) Soit g une densité de X et n un entier naturel, on sait que X admet un moment d'ordre n si et seulement si,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t)dt \text{ converge absolument.}$$

Comme g est nulle sur $\mathbb{R}_-{}^*$ et positive sur $\mathbb{R}^+$, il suffit de prouver que $\int_0^{+\infty} t^n \lambda e^{-\lambda t}dt$ converge.
Soit $A > 0$, considérons le changement de variable affine $u = \lambda t$, on a alors :

$$\int_0^A t^n \lambda e^{-\lambda t}dt = \lambda \int_0^{\lambda A} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^n e^{-u}\frac{du}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^n}\int_0^{\lambda A} u^n e^{-u}du.$$

De plus, on sait que $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^{\lambda A} u^n e^{-u}du = \int_0^{+\infty} u^n e^{-u}du = \Gamma(n+1) = n!$. On en déduit alors que $\int_0^{+\infty} t^n g(t)dt$ converge et vaut $\frac{n!}{\lambda^n}$.

$$\boxed{X \text{ admet un moment d'ordre } n \text{ pour tout entier naturel } n \text{ qui vaut } \frac{n!}{\lambda^n}.}$$

2) Remarquons que les deux matrices H_n et G_n sont symétrique.

$$\boxed{H_3 = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G_3 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \\ u_3 & u_4 & u_5 \end{pmatrix}.}$$

3) ${}^tWH_nW$ est la forme quadratique associée à la matrice H_n en W, donc on sait que :

$${}^tWH_nW = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j(H_n)_{i,j}$$

Or, d'après l'énoncé on a : $(H_n)_{i,j} = u_{i+j-2}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$. On obtient bien :

$$\boxed{{}^tWH_nW = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j u_{i+j-2}.}$$

Comme X est une solution du problème de Stieltjes, d'après l'énoncé on sait que X admet des moments de tout ordre et que $\mathbb{E}(X^n) = u_n$ pour tout entier naturel n. Dès lors, le résultat précédent nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
{}^tWH_nW &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j \mathbb{E}(X^{i+j-2}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j \int_0^{+\infty} t^{i+j-2} f(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j t^{i-1}t^{j-1}\right) f(t)dt \qquad \textit{(par linéarité des intégrales convergentes)} \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t^{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j t^{j-1}\right) f(t)dt \quad \textit{(car i et j ne dépendent pas l'un de l'autre)} \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t^{i-1}\right)^2 f(t)dt
\end{aligned}$$

On obtient bien :

$$\boxed{{}^tWH_nW = \int_0^{+\infty} (P(t))^2 f(t)dt.}$$

4) Comme H_n est une matrice symétrique on sait que son spectre est non vide, considérons alors λ une valeur propre quelconque de H_n et notons W un vecteur propre associé à cette valeur propre.

${}^tWH_nW = {}^tW\lambda W = \lambda\ {}^tWW = \lambda\|W\|^2$. Cette égalité combinée avec celle de la question précédente, nous permet d'écrire (car $W \neq 0$ et en utilisant le fait qu'une norme est définie positive) :

$$\lambda = \frac{1}{\|W\|^2}\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)dx.$$

Comme f est une densité, c'est une fonction positive sur $\mathbb{R}$, ainsi, $x \mapsto (P(x))^2 f(x)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Comme les bornes de l'intégrale sont dans le sens croissant et que l'intégrale converge, on sait par positivité de l'intégrale que :

$$\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)dx \geq 0$$

Comme $\|W\|^2 \geq 0$, on obtient : $\lambda \geq 0$.

Ceci étant vrai pour toutes les valeurs propres de H_n :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } H_n \text{ sont positives.}}$$

5) Il suffit de reprendre le même raisonnement que celui de la question 3. en considérant la fonction (qui n'est pas un polynôme cette fois) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*{}_+,\ Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-\frac{1}{2}}$$

et on obtient : ${}^tWG_nW = \displaystyle\int_0^{+\infty} (Q(x))^2 f(x)dx$.

Le raisonnement de la question 4 est alors valable en partant de cette égalité et on a bien :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } G_n \text{ sont positives.}}$$

Remarque

La convergence de l'intégrale avec Q n'est pas un problème car X admet des moments de tout ordre et nous ne faisons que réécrire la fonction à l'intérieur de l'intégrale en partant d'une intégrale convergente par linéarité des intégrales convergentes.

6) Considérons la matrice $G_2 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix}$. On sait que λ est une valeur propre de G_2 si et seulement si $\det(G_2 - \lambda I_2) = 0$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}(u_1-\lambda)(u_3-\lambda) - {u_2}^2 = 0 &\iff \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)(u_3-\lambda) - \frac{1}{9} = 0 \\ &\iff \lambda^2 - \left(\frac{1}{2}+u_3\right)\lambda + \frac{u_3}{2} - \frac{1}{9} = 0.\end{aligned}$$

D'après la question 5 on sait que les valeurs propres de G_2 sont toutes positives donc le discriminant du trinôme précédent (noté Δ) est positif. S'il vaut zéro alors G_2 possède une unique valeur propre mais comme c'est une matrice symétrique elle est diagonalisable et donc semblable à une matrice scalaire de la forme λI_2, ce qui est impossible car sinon G_2 serait la matrice λI_2. On en déduit que $\Delta > 0$.

$\Delta = \left(\frac{1}{2}+u_3\right)^2 - 4 \times \left(\frac{u_3}{2} - \frac{1}{9}\right)$. Ainsi, on sait que :

$$\frac{\frac{1}{2} + u_3 - \sqrt{\Delta}}{2} > 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} + u_3 > \sqrt{\Delta}$$

En appliquant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$0 > -4\left(\frac{u_3}{2} - \frac{1}{9}\right)$$

Nécessairement on a :

$$\frac{u_3}{2} - \frac{1}{9} > 0$$

$$\boxed{u_3 > \frac{2}{9}.}$$

Remarque

Nous avons fait mieux que le résultat demandé, en effet on pouvait se contenter de justifier que $\Delta \geq 0$ pour répondre à la question.

7) **a)** Posons $h(t) = t^n e^{-t^\theta}$ pour $t \in \mathbb{R}^+$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ par somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et on a pour $t \in \mathbb{R}^+$:

$$h'(t) = e^{-t^\theta}(nt^{n-1} - \theta t^n t^{\theta-1}) = t^{n-1}e^{-t^\theta}(n - \theta t^\theta).$$

On remarque alors que $h'(t)$ est positive si et seulement si, $n - \theta t^\theta \geq 0$ si et seulement si, $t \leq \left(\dfrac{n}{\theta}\right)^{1/\theta}$. La fonction h est donc majorée par $h\left(\left(\dfrac{n}{\theta}\right)^{1/\theta}\right) = \left(\dfrac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} e^{-n/\theta}$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+,\ t^n e^{-t^\theta} \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} e^{-n/\theta}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^{-\theta/n} = \mathbb{E}(X^n)^{-\theta/n} = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt\right)^{-\theta/n}$.

D'après la question précédente on a pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}
t^n \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} e^{-\frac{n}{\theta}} e^{t^\theta} &\Longrightarrow t^n f(t) \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} e^{-\frac{n}{\theta}} e^{t^\theta} f(t) \\
&\Longrightarrow \int_0^{+\infty} t^n f(t)dt \leq \int_0^{+\infty} \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} e^{-\frac{n}{\theta}} e^{t^\theta} f(t)dt \qquad (*) \\
&\Longrightarrow u_n^{-\frac{\theta}{n}} \geq \left(\left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} e^{-\frac{n}{\theta}}\right)^{-\frac{\theta}{n}} C^{-\frac{\theta}{n}} \\
&\Longrightarrow u_n^{-\frac{\theta}{n}} \geq \frac{\theta}{n} e^1 C^{-\frac{\theta}{n}}.
\end{aligned}$$

où $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{t\theta}dt$ car l'énoncé nous donne la convergence de cette intégrale.

Pour justifier $(*)$ il suffit simplement de remarquer que les deux intégrales sont convergentes (la première car X admet un moment d'ordre n et la deuxième comme combinaison linéaire de celle de l'énoncé) puis d'appliquer la croissance de l'intégrale avec les bornes dans le sens croissant.

Comme $C^{-\frac{\theta}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1$, on a : $\dfrac{\theta}{n} e^1 C^{-\frac{\theta}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \times \theta e^1$, et comme la série de terme général $\dfrac{1}{n} \times \theta e^1$ diverge par combinaison linéaire d'une série de Riemann divergente, on en déduit par critère d'équivalence des séries à termes positifs, puis par critère de comparaison des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum u_n^{-\frac{\theta}{n}} \text{ diverge.}}$$

8) Voici le programme :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
def teststieltjes(U) :
    N = len(U) - 1
    m = 1 + N // 2
    H = np.zeros((m,m))
    for n in range(1,m+1) :
        for i in range(0,m) :
            H[i,n-1] = U[i+n-1]
            H[n-1,i] = H[i+n-1]
    valp = al.eigvalsh(H)
    for k in range(0,len(valp)) :
        if valp[k] < 0 :
            return 0
    return 1
```

9) Comme $t \mapsto t^n e^{-t}\sin(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ il y a une impropreté en $+\infty$. Soit alors $t \geq 0$,

• $0 \leq |t^n e^{-t}\sin(t)| \leq t^n e^{-t}$ et $|t^n e^{-t}\cos(t)| \leq t^n e^{-t}$ car les fonctions sinus et cosinus sont bornées par -1 et 1.

• $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ converge et vaut $n!$ (c'est la fonction Gamma)

Donc par critère de comparaison des intégrales à fonctions positives, on en déduit en utilisant le fait que la convergence absolue implique la convergence :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\sin(t)dt \text{ et } \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\cos(t)dt \text{ existent.}}$$

10) Soit $A > 0$. Posons $\begin{cases} u(t) = \sin(t) & u'(t) = \cos(t) \\ v'(t) = e^{-t} & v(t) = -e^{-t} \end{cases}$

Comme u et v sont de classe C^1 sur $[0,A]$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^A e^{-t}\sin(t)dt = \Big[-\sin(t)e^{-t}\Big]_0^A + \int_0^A e^{-t}\cos(t)dt = -\sin(A)e^{-A} + \int_0^A e^{-t}\cos(t)dt.$$

Une seconde intégration par parties (en respectant le même ordre que celui de la première) donne alors :

$$\begin{aligned}\int_0^A e^{-t}\sin(t)dt &= -\sin(A)e^{-A} + \Big[-\cos(t)e^{-t}\Big]_0^A - \int_0^A \sin(t)e^{-t}dt \\ &= 1 - (\sin(A)+\cos(A))e^{-A} - \int_0^A \sin(t)e^{-t}dt.\end{aligned}$$

Un théorème d'encadrement permet de montrer directement que $\lim\limits_{A\to+\infty}(\cos(A)+\sin(A))e^{-A} = 0$, puis en utilisant la question précédente on sait que S_0 existe, donc en faisant tendre A vers $+\infty$ dans l'égalité que nous venons d'établir, on a :

$$S_0 = 1 - S_0.$$

$$\boxed{S_0 = \frac{1}{2}.}$$

Attention !
Le "On admet que $T_0 = S_0$" arrive après avoir calculé la valeur de S_0 on ne pouvait donc pas s'en servir! Si tel était le cas, le sujet aurait plutôt dit "On pourra utiliser sans démonstration $S_0 = T_0$".

11) Réécrivons S_{n+1} à l'aide d'une intégration par parties en considérant $A > 0$ et en posant :

$$\begin{cases} u(t) = t^n e^{-t} & u'(t) = (n+1)t^n e^{-t} - t^{n+1}e^{-t} \\ v'(t) = \sin(t) & v(t) = -\cos(t) \end{cases}$$

Comme u et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^A t^{n+1}e^{-t}\sin(t)dt &= \left[-t^{n+1}e^{-t}\cos(t)\right]_0^A + \int_0^A \left((n+1)t^n e^{-t} - t^{n+1}e^{-t}\right)\cos(t)dt \\ &= -A^{n+1}e^{-A}\cos(A) + (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}\cos(t)dt - \int_0^A t^{n+1}e^{-t}\cos(t)dt.\end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que celles évoquées à la question précédente, en faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient :

$$S_{n+1} = 0 + (n+1)T_n - T_{n+1}.$$

$$\boxed{S_{n+1} + T_{n+1} = (n+1)T_n.}$$

Un argument identique en partant de T_{n+1} donne :

$$\boxed{S_{n+1} - T_{n+1} = (n+1)S_n.}$$

12) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)MV_n = \frac{n+1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S_n \\ T_n \end{pmatrix} = \frac{n+1}{2}\begin{pmatrix} S_n + T_n \\ -S_n + T_n \end{pmatrix}.$$

D'après les deux égalités de la question précédentes on remarque en faisant $(3)+(4)$ et $(3)-(4)$,

$$\begin{cases} 2S_{n+1} = (n+1)(S_n + T_n) \\ 2T_{n+1} = (n+1)(T_n - S_n) \end{cases}$$

On a alors : $(n+1)MV_n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2S_{n+1} \\ 2T_{n+1} \end{pmatrix} = V_{n+1}.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = (n+1)MV_n.}$$

13) Récurrence immédiate.

14) Après calculs on obtient :

$$M^3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } M^4 = -\frac{1}{4}I_2.$$

D'après la question précédente et comme $M^{4n+3} = (M^4)^n M^3 = \left(\frac{-1}{4}\right)^n M^3$, on a :

$$V_{4n+3} = \frac{(4n+3)!(-1)^n}{4^{n+1}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{(4n+3)!(-1)^n}{4^{n+1}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De plus, par définition : $S_{4n+3} = (V_{4n+3})_1$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_{4n+3} = 0.}$$

15) La fonction $t \mapsto t^4$ est strictement croissante et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, donc le changement de variable $x = t^4$ est licite. Posons $A > 0$, on obtient alors :

$$\int_0^A x^n g(x)dx = \int_0^{A^{1/4}} t^{4n} g(t^4) 4t^3 dt = 4\int_0^{A^{1/4}} t^{4n+3} e^{-t}\sin(t)dt.$$

Comme $\int_0^{+\infty} t^{4n+3}e^{-t}\sin(t)dt$ converge et vaut 0 (c'est S_{4n+3}), on en déduit en faisant tendre A vers $+\infty$ que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^n g(x)dx \text{ converge et vaut } 0.}$$

16) (difficile) Déterminons deux fonctions g_1 et g_2 positives, continues et distinctes sur $\mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = g_1(x) - g_2(x).$$

Remarquons alors que $\sin(x^{1/4}) \geq 0$ si et seulement si $x^{1/4} \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ pour $k \in \mathbb{N}$. Notons alors $I = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} [(2k\pi)^4, ((2k+1)\pi)^4]$ et posons les deux fonctions :

$$\sin^+(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \text{ et } \sin^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in I \\ -\sin(x) & \text{sinon.} \end{cases}.$$

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = e^{-x^{1/4}}(\sin^+(x^{1/4}) - \sin^-(x^{1/4}))$.

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g_1(x) = e^{-x^{1/4}}\sin^+(x^{1/4})$ et $g_2(x) = e^{-x^{1/4}}\sin^-(x^{1/4})$. Vérifions que ces deux fonctions répondent bien à la question :

• Par construction on a bien pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ avec $g_1 \neq g_2$.

• Toujours par construction g_1 et g_2 sont deux fonctions positives sur $\mathbb{R}^+$.

• La continuité des deux fonctions est évidente sur $\mathbb{R}$ sauf en $(k\pi)^4$ pour $k \in \mathbb{N}$. Or, $g_1(k\pi) = e^{-k\pi}\sin(k\pi) = 0 = \lim\limits_{x\to k\pi} g_1(x)$. En faisant le même raisonnement pour g_2, on a bien deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$.

• Enfin, pour $x \geq 0$, $x^n g_1(x) \leq x^n e^{-x^{1/4}}$ et par croissance comparée on sait que $x^n e^{-x^{1/4}} \underset{+\infty}{=} o(1/x^2)$, donc par critères de comparaisons des intégrales à fonctions positives, on peut conclure que :

$$\int_0^{+\infty} x^n g_1(x)dx \text{ converge.}$$

Il en est de même pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n g_2(x)dx$.

Les deux fonctions g_1 et g_2 vérifient bien les hypothèses de la question, de plus, en utilisant la question précédente, on a :

$0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n(g_1(x)-g_2(x))dx = \int_0^{+\infty} x^n g_1(x)dx - \int_0^{+\infty} x^n g_2(x)dx$ par linéarité des intégrales convergentes. Finalement, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^n g_1(x)dx = \int_0^{+\infty} x^n g_2(x)dx \text{ avec } g_1,\ g_2 \text{ positives, continues et distinctes sur } \mathbb{R}^+.}$$

17) Notons C_n la valeur commune des deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n g_1(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n g_2(x)dx$. Posons alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{C_0} g_1(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{C_0} g_2(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est immédiat de vérifier que ces deux fonctions définissent des densités de probabilité, et par la question précédente on sait que les variables aléatoires correspondantes notées respectivement X_1 et X_2 admettent des moments de tout ordre. De plus, on a :

$$\mathbb{E}(X_1^n) = \mathbb{E}(X_2^n) = C_n.$$

$$\boxed{\text{Le problème } M^*(J) \text{ n'admet pas toujours une unique solution.}}$$

18) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$. On sait que f est une densité donc elle est positive, ainsi : $\forall t \in [0,1]$, $t^n f(t) \geq 0$. Comme $t \mapsto t^n f(t)$ est continue sur $[0,1]$ avec $0 < 1$, par positivité de l'intégrale : $u_n \geq 0$.

Si $u_n = 0$, alors la strict positivité de l'intégrale nous dit que : $\forall t \in [0,1]$, $t^n f(t) = 0$. On en déduit que pour $t \in]0,1]$, $f(t) = 0$. Ce qui est absurde puisque $X(\Omega) = [0,1]$. Finalement:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.}$$

19) Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k} &= \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} \int_0^1 t^{i+k} f(t)dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} t^k \right) t^i f(t)dt \qquad \textit{(par linéarité)} \\ &= \int_0^1 (1-t)^j t^i f(t)dt. \end{aligned}$$

De plus, comme : $\forall t \in]0,1[$, $(1-t)^j t^i f(t) > 0$ et $t \mapsto (1-t)^j t^i f(t)$ est continue sur $[0,1]$, par strict positivité de l'intégrale on a :

$$\int_0^1 (1-t)^j t^i f(t)dt > 0.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}u_{i+k} > 0.}$$

20) • Considérons $i = 1$ et $j = 2$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$u_1 - 2u_2 + u_3 > 0 \Longleftrightarrow u_3 > \frac{1}{6}.$$

• En considérant $i = 2$ et $j = 1$, on montre de même que $u_3 < \dfrac{1}{3}$.

$$\boxed{u_3 \in \left]\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right[.}$$

21) Soit $\alpha > 0$, $n \geq 1$, $\dfrac{u_n}{n^\alpha} = \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$.

De plus, f est continue sur le segment $[0,1]$, il existe $M > 0$ tel que : $\forall t \in [0,1]$, $f(t) \leq M$. Donc, par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^1 t^n f(t)dt \leq M\int_0^1 t^n dt \leq \frac{M}{n+1} \leq \frac{M}{n}.$$

On obtient alors : $0 \leq \dfrac{u_n}{n^\alpha} \leq \dfrac{M}{n^{\alpha+1}}$. Comme la série de terme général $\dfrac{M}{n^{\alpha+1}}$ est une combinaison linéaire d'une série de Riemann convergente (car $\alpha + 1 > 1$), on peut conclure par critère de comparaison des séries à termes positifs :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{u_n}{n^\alpha} \text{ converge.}}$$

De même comme $t \mapsto f(t)$ est continue sur le segment $[0,1]$ il existe une constante positive m telle que : $\forall t \in [0,1]$, $t^n f(t) > mt^n$. La positivité de l'intégrale nous permet alors d'obtenir : $u_n \geq \dfrac{m}{n+1}$, comme $\dfrac{m}{n+1} \sim \dfrac{m}{n}$ avec $\dfrac{m}{n} > 0$, et que la série de terme général $\dfrac{m}{n}$ diverge (combinaison linéaire de la série harmonique), on peut conclure par critères que la série de terme général u_n diverge.

$$\boxed{\text{Le résultat n'est plus valable pour } \alpha = 0.}$$

22) $\Delta_{n,0} = \displaystyle\sum_{k=0}^{0}(-1)^k\binom{0}{k}u_{n+k} = (-1)^0 \times \binom{0}{0} \times u_n$.

$$\boxed{\Delta_{n,0} = u_n.}$$

23) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j} &= \sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}u_{n+k-j} - \sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}u_{n+k+1-j} \\
&= \sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}u_{n+k-j} - \sum_{l=1}^{j+1}(-1)^{l-1}\binom{j}{l-1}u_{n+l-j}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j} + \sum_{l=1}^{j+1} (-1)^l \binom{j}{l-1} u_{n+l-j} \\
&= (-1)^0 \binom{j}{0} u_{n+k} + (-1)^j \binom{j}{j} u_{n+1} + \sum_{k=1}^{j} (-1)^k \left(\binom{j}{k} + \binom{j}{k-1} \right) u_{n+k-j} \\
&= (-1)^0 \binom{j}{0} u_{n+k} + (-1)^j \binom{j}{j} u_{n+1} + \sum_{k=1}^{j} (-1)^k \binom{j+1}{k} u_{n+k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j+1}{k} u_{n+k-j}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\Delta_{n+1,j+1} = \Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j}.}$$

24) Voici le programme :

```
import numpy as np
def testhausdorff(U) :
    N = len(U)-1
    Delta = np.zeros((N+1,N+1))
    info = -1
    for k in range(0,N+1) :
        Delta[k,0] = U[k]
        if ((Delta[k,0] <= 0) and (info == -1)) :
            info = k
        for j in range(1,k+1) :
            Delta[k,j] = Delta[k-1,j-1] - Delta[k,j-1]
            if ((Delta[k,j] <= 0) and (info == -1)) :
                info = k
    return (info , Delta)
```

25) La fonction `test3()`, applique `testhausdorff(U)` avec `U` un vecteur qui admet comme coordonnées les moments de la loi uniforme sur $[0,1]$. Or, on sait que la loi uniforme admet des solutions au problème de Hausdorff, donc on aura `V[0]=-1`.

En remplacant alors le 4ème coefficient de la colonne 1 de V on obtient une matrice pour W de la forme :

`[[1,0,...,0],[1/2,1/2,0,...,0],[1/3,1/6,1/3,0,...,0],[0.16,0.173,-0.06,...],....]`

$\boxed{\text{Les valeurs de } \texttt{V[0]} \text{ et } \texttt{W[0]} \text{ sont respectivement } -1 \text{ et } 3.}$

26) h est de classe C^1 sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions C^1 (en effet, f_1 et f_2 sont supposées de classe C^1 sur $[0,1]$). Ainsi, $|h'|$ est continue sur le segment $[0,1]$ (comme composition de telles fonctions) elle admet donc un majorant noté K qui est dans $\mathbb{R}^+$. L'inégalité des accroissements finis $(*)$ nous permet alors de conclure directement au résultat.

$$\boxed{\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |h(x) - h(y)| \leq K|x-y|.}$$

$(*)$ Comme h est de classe C^1 sur $[0,1]$ elle est en particulier continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

27) **a)** (difficile mais classique de parisienne) Remarquons d'abord que $Z_n(\Omega) = \left\{ \frac{i}{n} \mid i \in [\![0, n]\!] \right\} \subset [0, 1]$. Comme Z_n prend un nombre fini de valeurs, toutes les espérances de cette question existent.

De plus, comme x est fixé dans $[0, 1]$, on sait que $h(x)$ n'est pas aléatoire donc $h(x) = \mathbb{E}(h(x))$. On peut alors écrire par linéarité de l'espérance :

$$|h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| = |\mathbb{E}(h(x) - h(Z_n))|.$$

Notons maintenant $\varphi_x(z) = h(x) - h(z)$ avec $z \in [0, 1]$, on remarque par le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(h(x) - h(Z_n)) = \mathbb{E}(\varphi_x(Z_n)) = \sum_{y \in Z_n(\Omega)} (h(x) - h(y))\mathbb{P}(Z_n = y).$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$|\mathbb{E}(h(x) - h(Z_n))| \leq \sum_{y \in Z_n(\Omega)} |h(x) - h(y)|\mathbb{P}(Z_n = y).$$

Mais comme pour tout $y \in Z_n(\Omega)$, $y \in [0, 1]$, en sommant dans l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$\sum_{y \in Z_n(\Omega)} |h(x) - h(y)|\mathbb{P}(Z_n = y) \leq K \sum_{y \in Z_n(\Omega)} |x - y|\mathbb{P}(Z_n = y).$$

En utilisant la transitivité dans les inégalités précédentes et par le théorème de transfert nous avons alors :

$$|h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| \leq K\mathbb{E}(|x - Z_n|).$$

La parité de la fonction valeur absolue, nous permet de conclure :

$$\boxed{|h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| \leq K\mathbb{E}(|Z_n - x|).}$$

b) On sait que $\mathbb{E}(|Z_n - x|) = \sum_{y \in Z_n(\Omega)} |y - x|\mathbb{P}(Z_n = y) = \sum_{y \in Z_n(\Omega)} |y - x|\sqrt{\mathbb{P}(Z_n = y)}\sqrt{\mathbb{P}(Z_n = y)}$.

Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{y \in Z_n(\Omega)} |y - x|\sqrt{\mathbb{P}(Z_n = y)}\sqrt{\mathbb{P}(Z_n = y)} \leq \sqrt{\sum_{y \in Z_n(\Omega)} |y - x|^2\mathbb{P}(Z_n = y)}\sqrt{\sum_{y \in Z_n(\Omega)} \mathbb{P}(Z_n = y)}.$$

Or, $\begin{cases} \sqrt{\sum_{y \in Z_n(\Omega)} |y - x|^2\mathbb{P}(Z_n = y)} = \sqrt{\mathbb{E}((Z_n - x)^2)} & \text{par le théorème de transfert} \\ \sqrt{\sum_{y \in Z_n(\Omega)} \mathbb{P}(Z_n = y)} = \sqrt{1} = 1 & \text{car la somme des probabilités sur le support vaut 1} \end{cases}$

En regroupant alors tous les résultats de cette question et en utilisant l'inégalité de la question précédente, on obtient bien :

$$\boxed{|h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| \leq K\sqrt{\mathbb{E}((Z_n - x)^2)}.}$$

Rappel

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Soient $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ...y_n)$ dans $(\mathbb{R}^+)^n$ alors :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}.$$

28) Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons pour cette question Y_n qui suit une loi binomiale de paramètre n et x. On a bien que Y_n est une variable aléatoire discrète qui prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$. On peut donc lui appliquer l'inégalité de la question 27. Or, on a :

$$\mathbb{E}(h(Z_n)) = \mathbb{E}\left(h\left(\frac{Y_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n}\mathbb{P}(Y_n = k)\right) = \hat{h}_n(x).$$

Donc l'inégalité de la question 27. nous donne :

$$|h(x) - \hat{h}_n(x)| \leq K\sqrt{\mathbb{E}((Z_n - x)^2)}.$$

De plus, $\mathbb{E}((Z_n - x)^2) = \dfrac{1}{n^2}\mathbb{E}((Y_n - nx)^2)$. Or, par linéarité de l'espérance on sait que la variable aléatoire $Y_n - nx$ est centrée (car $\mathbb{E}(Y_n) = nx$) donc par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{E}((Y_n - nx)^2) = \mathbb{V}(Y_n - nx) = \mathbb{V}(Y_n) = nx(1-x)$$

On en déduit alors : $\mathbb{E}((Z_n - x)^2) = \dfrac{x(1-x)}{n}$. Finalement,

$$\boxed{|h(x) - \hat{h}_n(x)| \leq K\frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}}.}$$

Il est facile de remarquer : $\forall x \in [0,1]$, $x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$ (identité remarquable ou étude de fonction). Donc, on peut améliorer l'inégalité précédente pour obtenir :

$$\boxed{|h(x) - \hat{h}_n(x)| \leq \frac{K}{2\sqrt{n}}.}$$

29) Comme le précise l'énoncé on sait que $\hat{h}_n$ est une fonction polynômiale, on peut alors écrire :

$$\hat{h}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Par continuité sur $[0,1]$ de la fonction $x \mapsto \hat{h}_n(x)h(x)$, on peut considérer son intégrale et obtenir par linéarité :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \hat{h}_n(x)h(x)dx &= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 x^k h(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\int_0^1 x^k f_2(x)dx - \int_0^1 x^k f_1(x)dx\right)\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\mathbb{E}(X_2^k) - \mathbb{E}(X_1^k)\right)$$

Comme X_1 et X_2 sont deux solutions du même problème des moments, on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_1^k) = \mathbb{E}(X_2^k)$. Finalement, on obtient bien :

$$\boxed{\int_0^1 \hat{h}_n(x)h(x)dx = 0.}$$

30)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 h^2(x)dx &= \int_0^1 (h(x) - \hat{h}_n(x) + \hat{h}_n(x))h(x)dx \\
&= \int_0^1 (h(x) - \hat{h}_n(x))h(x)dx + \int_0^1 \hat{h}_n(x)h(x)dx && \textit{(par linéarité)} \\
&= \int_0^1 (h(x) - \hat{h}_n(x))h(x)dx && \textit{(par la question précédente)}
\end{aligned}$$

Or, par positivité de l'intégrale et ce que nous venons d'établir :

$$\int_0^1 h^2(x)dx = \left|\int_0^1 h^2(x)dx\right| = \left|\int_0^1 (h(x) - \hat{h}_n(x))h(x)dx\right|$$

Donc, par l'inégalité triangulaire et le résultat de la question 28. on obtient :

$$\int_0^1 h^2(x)dx \leq \int_0^1 |h(x) - \hat{h}_n(x)||h(x)|dx \leq \int_0^1 \frac{K}{2\sqrt{n}}|h(x)|dx$$

On peut alors conclure :

$$\boxed{\int_0^1 h^2(x)dx \leq \frac{K}{2\sqrt{n}} \int_0^1 |h(x)|dx.}$$

31) Comme : $\forall x \in [0,1]$, $h^2(x) \geq 0$, la positivité de l'intégrale et la question précédente nous permettent de dire que :

$$0 \leq \int_0^1 h^2(x)dx \leq \frac{K}{2\sqrt{n}} \int_0^1 |h(x)|dx.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, un théorème d'encadrement nous donne alors :

$$\int_0^1 h^2(x)dx = 0.$$

Par stricte positivité de l'intégrale, on sait alors que la fonction h^2 est nulle sur $[0,1]$, puis h est nulle sur $[0,1]$. Comme $h = f_2 - f_1$, on obtient :

$$\boxed{f_1 = f_2.}$$

Comme f_1 et f_2 sont deux densités de deux solutions du problème des moments avec $J = [0,1]$, on peut conclure :

$$\boxed{\text{Il y a unicité de la solution au problème de Hausdorff pour les densités de classe } C^1 \text{ sur } [0,1].}$$

32) La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative est donc au dessus de sa tangente au point d'abscisse 0 qui admet pour équation $y = 1 \times (x-0)+1 = x+1$, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x \leq e^x$, puis :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ 0 \leq e^x - 1 - x.}$$

On sait alors que $\forall x \in [-1,1],\ e^x - 1 - x = |e^x - 1 - x|$. De plus, comme la fonction exponentielle est de classe C^2 sur l'intervalle I d'extrémités 0 et x, avec $\exp''$ =exp, on sait que :

$$\forall t \in I,\ \ |\exp''(t)| \leq e^1$$

La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 donne alors :

$$|e^x - e^0 - e^0(x-0)| \leq \frac{(x-0)^2}{2!}e^1.$$

On pose alors $C = \dfrac{e^1}{2}$, et on obtient bien :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \ e^x - 1 - x \leq Cx^2.}$$

33) **a)** Soit $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$, pour montrer que R_k admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en (a_1,a_2) qui vaut $R_{k+1}(a_1,a_2)$, il suffit de montrer que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_k(a_1+h,a_2) - R_k(a_1,a_2)}{h} = R_{k+1}(a_1,a_2).$$

Notons $R_{k,a_1,a_2,h} = \left|\dfrac{R_k(a_1+h,a_2) - R_k(a_1,a_2)}{h} - R_{k+1}(a_1,a_2)\right|.$

$$\begin{aligned}
R_{k,a_1,a_2,h} &= \left|\frac{1}{h}\left(\int_0^1 t^k e^{(a_1+h)t+a_2t^2} - t^k e^{a_1t+a_2t^2}dt - ht^{k+1}e^{a_1t+a_2t^2}dt\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\int_0^1 \left|t^k e^{a_1t+a_2t^2}\left(e^{ht} - 1 - th\right)\right| dt \quad \textit{(inégalité triangulaire)} \\
&\leq \frac{1}{|h|}\int_0^1 t^k e^{a_1t+a_2t^2}\left|e^{th} - 1 - th\right| dt \\
&\leq \frac{1}{|h|}\int_0^1 t^k e^{a_1t+a_2t^2} Ct^2h^2 dt \qquad \textit{(par 32.)} \\
&\leq |h|\hat{C}.
\end{aligned}$$

où $\hat{C} = \displaystyle\int_0^1 t^{k+2}e^{a_1t+a_2t^2}dt.$

Comme une valeur absolue est toujours positive et que $\lim\limits_{h\to 0}|h|\hat{C} = 0$, on sait par théorème d'encadrement que :

$$\lim_{h\to 0}\left(\left|\frac{R_k(a_1+h,a_2) - R_k(a_1,a_2)}{h} - R_{k+1}(a_1,a_2)\right|\right) = 0$$

On en déduit alors (car toutes les intégrales existent par continuité des fonctions intégrées sur $[0,1]$) que la limite quand h tend vers 0 du taux d'accroissement est finie et vaut $R_{k+1}(a_1,a_2)$. Ainsi, R_k admet une dérivée partielle par rapport à sa 1ère variable et :

$$\boxed{\partial_1 R_k(a_1,a_2) = R_{k+1}(a_1,a_2).}$$

b) Comme R_0 est strictement positive par stricte positivité de l'intégrale, on en déduit que F_k admet une dérivée partielle par rapport à sa première et sa deuxième variable comme quotient bien défini de fonction à deux variables qui ont des dérivées partielles d'ordre 1. Soit alors $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\partial_1 F_k(a_1, a_2) &= \frac{\partial_1 R_k(a_1, a_2) \times R_0(a_1, a_2) - R_k(a_1, a_2) \times \partial_1 R_0(a_1, a_2)}{(R_0(a_1, a_2))^2} \\
&= \frac{R_{k+1}(a_1, a_2) R_0(a_1, a_2) - R_k(a_1, a_2) R_1(a_1, a_2)}{(R_0(a_1, a_2))^2} \\
&= \frac{R_{k+1}(a_1, a_2)}{R_0(a_1, a_2)} - \frac{R_1(a_1, a_2)}{R_0(a_1, a_2)} \times \frac{R_k(a_1, a_2)}{R_0(a_1, a_2)} \\
&= F_{k+1}(a_1, a_2) - F_1(a_1, a_2) \times F_k(a_1, a_2)
\end{aligned}$$

On obtient bien :

$$\boxed{\partial_1 F_k = F_{k+1} - F_k F_1.}$$

De même, par rapport à la deuxième variable en utilisant le résultat admis à la question précédente on obtient :

$$\begin{aligned}
\partial_2 F_k(a_1, a_2) &= \frac{\partial_2 R_k(a_1, a_2) \times R_0(a_1, a_2) - R_k(a_1, a_2) \times \partial_2 R_0(a_1, a_2)}{(R_0(a_1, a_2))^2} \\
&= \frac{R_{k+2}(a_1, a_2) R_0(a_1, a_2) - R_k(a_1, a_2) R_2(a_1, a_2)}{(R_0(a_1, a_2))^2} \\
&= \frac{R_{k+2}(a_1, a_2)}{R_0(a_1, a_2)} - \frac{R_2(a_1, a_2)}{R_0(a_1, a_2)} \times \frac{R_k(a_1, a_2)}{R_0(a_1, a_2)} \\
&= F_{k+2}(a_1, a_2) - F_2(a_1, a_2) \times F_k(a_1, a_2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\partial_2 F_k = F_{k+2} - F_k F_2.}$$

c) Pour alléger les notations nous noterons dans cette question $T = e^{a_1 t + a_2 t^2}$ et nous écrirons F_i à la place de $F_i(a_1, a_2)$ (cette quantité de dépend pas de t!).
Comme la fonction $t \mapsto (t^i - F_i)(t^k - F_k)e^T$ est continue sur $[0, 1]$, son intégrale sur $[0, 1]$ est bien définie et on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_0} \int_0^1 (t^i - F_i)(t^k - F_k) e^T dt &= \frac{1}{R_0} \int_0^1 \left(t^{i+k} e^T - t^i \frac{R_k}{R_0} e^T - t^k \frac{R_i}{R_0} e^T + \frac{R_i}{R_0} \frac{R_k}{R_0} e^T \right) dt \\
&= \frac{1}{R_0} \left(R_{k+i} - \frac{R_k}{R_0} R_i - \frac{R_i}{R_0} R_k + \frac{R_i}{R_0} \frac{R_k}{R_0} R_0 \right) \\
&= \frac{R_{k+1}}{R_0} - \frac{R_k}{R_0} \frac{R_i}{R_0} - \frac{R_i}{R_0} \frac{R_k}{R_0} + \frac{R_i}{R_0} \frac{R_k}{R_0} \\
&= F_{k+i} - F_k F_i.
\end{aligned}$$

Donc, d'après le résultat de la question précédente on obtient bien :

$$\boxed{\partial_i F_k(a_1, a_2) = \frac{1}{R_0(a_1, a_2)} \int_0^1 (t^i - F_i(a_1, a_2))(t^k - F_k(a_1, a_2)) e^{a_1 t + a_2 t^2} dt.}$$

34) **a)** Comme R_0 est strictement positive sur $\mathbb{R}^2$, par composition bien définie d'une fonction à deux variables qui admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 et de la fonction ln, puis par somme : G admet des dérivées partielles d'ordres 1 et 2. Soit $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$,
$\partial_1 G(a_1, a_2) = \dfrac{R_1(a_1, a_2)}{R_0(a_1, a_2)} - u_1 = F_1(a_1, a_2) - u_1.$
$\partial_2 G(a_1, a_2) = \dfrac{R_2(a_1, a_2)}{R_0(a_1, a_2)} - u_2 = F_2(a_1, a_2) - u_2.$
$\partial^2_{1,1} G(a_1, a_2) = \partial_1 F_1(a_1, a_2).$
$\partial^2_{2,2} G(a_1, a_2) = \partial_1 F_2(a_1, a_2).$
$\partial^2_{2,1} G(a_1, a_2) = \partial_2 F_1(a_1, a_2).$
$\partial^2_{1,2} G(a_1, a_2) = \partial_1 F_2(a_1, a_2).$
La question 33.(b) nous permet de remarquer que $\partial^2_{1,2} G = \partial^2_{2,1} G$. On obtient alors :

$$\boxed{\nabla^2 G(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(a_1, a_2) & \partial_1 F_2(a_1, a_2) \\ \partial_1 F_2(a_1, a_2) & \partial_2 F_2(a_1, a_2) \end{pmatrix}.}$$

b) Reprenons les notations de la question 33.c et ajoutons les suivantes :

$$a = t - F_1 \text{ et } b = t^2 - F_2$$

On sait que ${}^t v \nabla^2 G(a_1, a_2) v = \partial_1 F_1 v_1^2 + \partial_2 F_2^2 + 2 v_1 v_2 \partial_1 F_2$ (on peut le vérifier à la main ou simplement observer que c'est une forme quadratique).
La question 33.(c) nous donne alors (à l'aide de la linéarité des intégrales définies) :
${}^t v \nabla^2 G(a_1, a_2) v = \dfrac{1}{R_0} \displaystyle\int_0^1 e^T \left(v_1^2 a^2 + v_2^2 b^2 + 2 v_1 v_2 a b \right) dt = \dfrac{1}{R_0} \int_0^1 e^T (a v_1 + b v_2)^2 dt.$
La fonction à l'intérieur de l'intégrale étant positive et non nulle car $v \neq 0$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points), la stricte positivité de l'intégrale nous permet de dire que :

$$\boxed{{}^t v \nabla^2 G(a_1, a_2) v > 0.}$$

c) Comme $\nabla^2 G(a_1, a_2)$ est une matrice symétrique à coefficients réels, elle admet des valeurs propres. Notons alors λ une valeur propre de cette matrice et v un vecteur propre qui lui est associé.
${}^t v \nabla^2 G(a_1, a_2) v = {}^t v \lambda v = \lambda \|v\|^2$. En utilisant le résultat de la question précédente on a :

$$\lambda \|v\|^2 > 0.$$

Mais comme $v \neq 0$, $\|v\|^2 > 0$, ainsi $\lambda > 0$. Ceci étant vrai pour toutes les valeurs propres :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } \nabla^2 G(a_1, a_2) \text{ sont strictement positives.}}$$

d) Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert (x, y) est un point critique de G ssi $\nabla G(x, y) = (0, 0)$.

$$\begin{aligned} \nabla G(x, y) = (0, 0) &\iff \begin{cases} F_1(x, y) - u_1 = 0 \\ F_2(x, y) - u_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} F_1(x, y) = u_1 \\ F_2(x, y) = u_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme X est solution du problème des moments sur $[0,1]$, on sait que $u_1 = \mathbb{E}(X)$ et $u_2 = \mathbb{E}(X^2)$.
Or, pour $i \in [\![1,2]\!]$, $\mathbb{E}(X^i) = \displaystyle\int_0^1 t^i f(t)dt = \frac{1}{R_0(a_1,a_2)} \int_0^1 t^i e^{a_1 t + a_2 t^2 dt} = F_i(a_1,a_2)$.
Donc, $u_1 = F_1(a_1,a_2)$ et $u_2 = F_2(a_1,a_2)$.
Ainsi, il est clair que (a_1,a_2) est un point critique de G. De plus, par la question 34.(c) on sait que les valeurs propres de la matrice hessienne de G en (a_1,a_2) sont strictements positives. On peut donc conclure que :

$$\boxed{G \text{ admet un minimum local en } (a_1,a_2).}$$

Attention !

Dans cette question a_1 et a_2 sont fixés et la fonction f dépend de ces deux réels!