

RÉVISIONS - PROBABILITÉS DISCRÈTES

Problème 1 - Ecricome ECS 2020 - Problème

On étudie dans ce problème un processus temporel de comptage appelé **processus de Poisson**.

L'objectif de ce problème est d'étudier ce processus en partant de deux définitions différentes, qui se révéleront être équivalentes.

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Partie I - Définition par X_1, X_2, \dots, X_n .

On considère dans cette partie une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

avec la convention $S_0 = 0$.

Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note N_t la variable aléatoire égale à la plus grande valeur de n pour laquelle S_n est inférieure ou égal à t , c'est-à-dire :

$$N_t = \sup\{n \in \mathbb{N}, S_n \leq t\}.$$

Par convention, si l'ensemble écrit ci-dessus n'est pas fini, on pose $N_t = -1$.

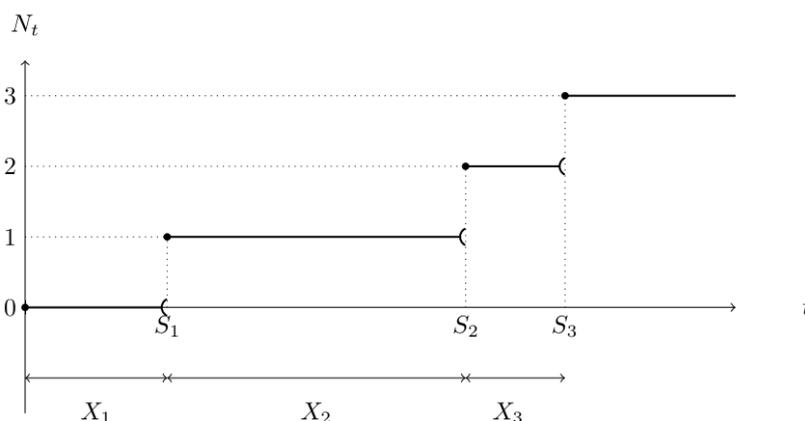


FIGURE 1 – Exemple de réalisation de N_t en fonction de t .

1. Pour tout réel t strictement positif, montrer que : $P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$.
2. Montrer qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ si et seulement si λX suit la loi γ de paramètre 1.
3. Pour tout entier n non nul, en déduire une densité de la variable aléatoire λS_n .
4. Pour tout réel t strictement positif et pour tout entier naturel n , comparer les événements $[N_t \geq n]$ et $[S_n \leq t]$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$:

$$P(N_t = n) = \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} du - \int_0^{\lambda t} \frac{u^n}{n!} e^{-u} du.$$

6. En intégrant par parties une des intégrales ci-dessus, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Quelle est la loi de N_t ?

7. On rappelle que l'instruction Python `rd.exponential(1/mu,n)` renvoie un tableau à n éléments dont les coefficients sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre μ . On rappelle également que l'instruction Python `plt.plot(x,y)` effectue un tracé qui relie les points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ si $\mathbf{x} = \text{np.array}([x_1, x_2, \dots, x_n])$ et $\mathbf{y} = \text{np.array}([y_1, y_2, \dots, y_n])$ sont deux tableaux de même taille.

- (a) Écrire une fonction d'en-tête `def simulation_S(n,mu)` : renvoyant une réalisation de S_n (avec $\lambda = \mu$).
 (b) Écrire une fonction d'en-tête `def simulation_N(t,mu)` : renvoyant une réalisation de N_t (avec $\lambda = \mu$).
 (c) On a commencé à écrire une fonction `evolution_S` renvoyant toutes les valeurs S_1, S_2, \dots, S_n tant que $S_n \leq t$. Compléter cette fonction.

```
1 def evolution_S(t,mu):
    L = np.array([])
    S = rd.exponential(1/mu)
    while ... :
5     # np.append ajoute un element a la fin du tableau
    L = np.append(L,S)
    S = S + ...
    return L
```

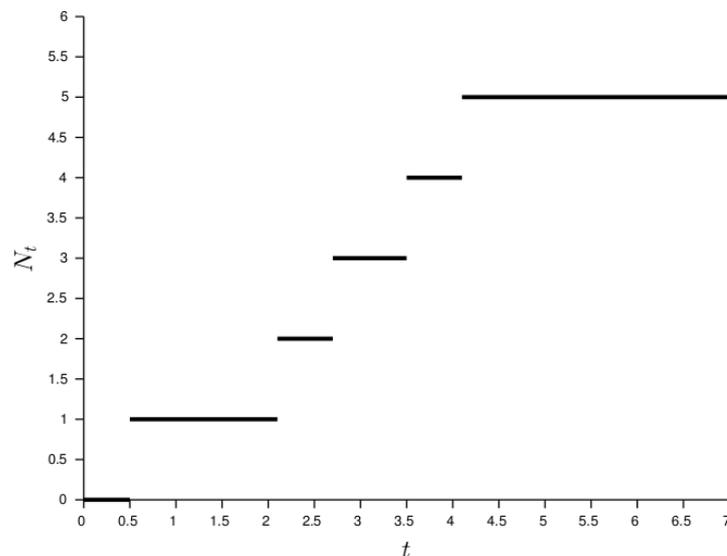
- (d) On a commencé à écrire un script Python ci-dessous. Dans ce script, on note $\mathbf{S} = [S_1, \dots, S_n]$ et on souhaite tracer l'évolution de N_t du temps 0 au temps S_n de la même manière que sur la figure 1.

```
1 def trace_N(t,mu):
    S = evolution_S(t,mu)
    n = len(S)
    plt.plot([0,S[0]],[0,0])
5    for i in range(1,n):
        ...
```

Par laquelle des instructions suivantes faut-il compléter la ligne manquante ?

- i. `plot([S[i-1],S[i]],[i,i])`
- ii. `plot([i,i+1],[S[i-1],S[i]])`
- iii. `plot([S[i-2],S[i-1]],[i,i])`
- iv. `plot([i,S[i]],[i,i])`

- (e) Un étudiant exécute le script précédent pour $t = 7$ et $\mu = 1$. On obtient la figure suivante :



Que valent dans ce cas $N_{3,2}$ et $N_{5,5}$?

Donner une valeur approximative de S_2 et de X_4 .

Partie II - Définition par $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$

On rappelle que les parties de ce problème sont indépendantes.

Dans cette partie, on définit une famille de variables aléatoires $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (H_1) : $N_0 = 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $N_t(\Omega) \subset \mathbb{N}$;
- (H_2) : pour tout $t > 0$, $P(N_t = 0) < 1$;
- (H_3) : pour tous réels $h \geq 0$ et $t \geq 0$, la variable aléatoire $N_{t+h} - N_t$ est indépendante de la variable aléatoire N_t ; de plus, $N_{t+h} - N_t$ et N_h ont la même loi ;
- (H_4) : $P(N_h \geq 2) = o(h)$ lorsque h tend vers 0 par valeurs positives.

Enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note :

$$p_n(t) = P(N_t = n).$$

8. Propriétés élémentaires.

(a) Que vaut $p_0(0)$?

(b) Montrer que le processus est croissante, c'est-à-dire que pour tous $t, h \in \mathbb{R}_+$:

$$P(N_{t+h} - N_t \geq 0) = 1.$$

9. Détermination de p_0 .

(a) En écrivant $N_{t+h} = N_t + (N_{t+h} - N_t)$, montrer que pour tout $t, h \in \mathbb{R}_+$:

$$p_0(t+h) = p_0(t)p_0(h).$$

(b) En déduire que la fonction p_0 est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ .

(c) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}_+$:

$$p_0(ns) = (p_0(s))^n.$$

En déduire que pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_0\left(\frac{m}{n}\right) = (p_0(1))^{m/n}.$$

On pourra poser $s = \frac{m}{n}$ et utiliser le début de la question.

(d) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On admet qu'il existe deux suites $(u_n), (v_n)$ de nombres rationnels telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq t \leq v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = t.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $p_0(1) = e^{-\lambda}$. Montrer que :

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

10. Loi de N_t .

Par la suite, $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Donner le développement limité à l'ordre 1 de $p_0(h)$ lorsque h tend vers 0.

(b) Après avoir justifié que $([N_h = 0], [N_h = 1], [N_h \geq 2])^*$ est un système complet d'événements, montrer que :

$$p_1(h) = \lambda h + o_{h \rightarrow 0}(h).$$

(c) En écrivant $N_{t+h} = N_h + (N_{t+h} - N_h)$ et en utilisant le système complet d'événements introduit précédemment, montrer que :

$$p_n(t+h) = p_0(h)p_n(t) + p_1(h)p_{n-1}(t) + o_{h \rightarrow 0}(h).$$

(d) Dédurre de cette dernière égalité que :

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t)) + \underset{h \rightarrow 0}{o}(1).$$

En déduire que p_n est dérivable en t et donner l'expression de $p'_n(t)$.

(e) Pour tous n de \mathbb{N} et t de \mathbb{R}_+ , on pose $q_n(t) = e^{\lambda t} p_n(t)$.

Justifier la dérivabilité de q_n puis montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+, q'_n(t) = \lambda q_{n-1}(t).$$

(f) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

(g) Quelle est la loi de N_t ?

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n le premier instant t où N_t vaut n , c'est-à-dire :

$$S_n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+, N_t = n\}.$$

(a) Que vaut S_0 ? On le justifiera en revenant précisément à la définition donnée.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Exprimer l'événement $[S_1 > t]$ en fonction de N_t .

(c) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$P(S_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

(d) Reconnaître la loi de S_1 .

(e) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, N_t = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq t\}.$$