Correction - Probabilités discrètes

Problème 1 - Ecricome ECS 2020 - Problème

Partie I - Définition par X_1, X_2, ..., X_n.

1.

Raisonnons à issue ω fixée. Si $N_t = n$, cela signifie que $S_n \leq t$ (puisque dans ce cas, la borne supérieure est la maximum) et que $S_{n+1} > t$. Dans le cas particulier $n = 0$, on a donc : $N_t = 0 \Leftrightarrow S_0 \leq t$ et $S_1 > t$. D'où :

$$\begin{aligned} P(N_t = 0) &= P([S_0 \leq t] \cap [S_1 > t]) = P(\underbrace{[0 \leq t]}_{=\Omega} \cap [S_1 > t]) = P(S_1 > t) \\ &= 1 - P(S_1 \leq t) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) \boxed{= \mathrm{e}^{\lambda t}.} \end{aligned}$$

2.

On a de manière générale :

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \Leftrightarrow \lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1).$$

Or les lois exponentielles de paramètre 1 et γ de paramètre 1 sont les mêmes. D'où :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \Leftrightarrow \lambda X \hookrightarrow \gamma(1).}$$

3.

On a :

$$\lambda S_n = \lambda \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda X_k$$

où les λX_k sont mutuellement indépendants par lemme des coalitions et suivent tous la loi $\gamma(1)$.
Par stabilité de la loi γ, on a :

$$\lambda S_n \hookrightarrow \gamma(n).$$

Et donc une densité de λS_n est donnée par :

$$\boxed{f_{\lambda S_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(n)} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

que l'on peut éventuellement simplifier en :

$$\boxed{f_{\lambda S_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

4.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$. Montrons l'égalité des événements par double inclusion.
Montrons d'abord que $[S_n > t] \subset [N_t < n]$. Soit $\omega \in [S_n > t]$. On a $S_n(\omega) > t$. Comme $(S_k(\omega))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a :

$$\forall k \geq n, \ S_k(\omega) > t.$$

Et donc nécessairement :

$$\sup\{k \in \mathbb{N}, S_k(\omega) \leq t\} < n$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{N_t(\omega) < n.}$$

L'inclusion est prouvée.
En passant au complémentaire, on trouve :

$$\boxed{[N_t \geq n] \subset [S_n \leq t].}$$

L'inclusion réciproque est vraie. Soit $\omega \in [S_n \leq t]$. On a $S_n(\omega) \leq t$ et donc :

$$n \in \{k \in \mathbb{N},\ S_k(\omega) \leq t\}.$$

D'où en particulier :

$$n \leq \underbrace{\sup\{k \in \mathbb{N},\ S_k(\omega) \leq t\}}_{=N_t(\omega)}.$$

Et ainsi :

$$\boxed{[S_n \leq t] \subset [N_t \geq n].}$$

Donc :

$$\boxed{[S_n \leq t] = [N_t \geq n].}$$

5.

On a ainsi pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} & P(N_t = n) = P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n+1) \\ = \ & P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) = P(\lambda S_n \leq \lambda t) - P(\lambda S_{n+1} \leq \lambda t) \\ = \ & \int_{-\infty}^{\lambda t} f_{\lambda S_n}(u)\mathrm{d}u - \int_{-\infty}^{\lambda t} f_{\lambda S_{n+1}}(u)\mathrm{d}u \boxed{= \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}\mathrm{e}^{-u}}{(n-1)!}\mathrm{d}u - \int_0^{\lambda t} \frac{u^n \mathrm{e}^{-u}}{n!}\mathrm{d}u.} \end{aligned}$$

Pour $t = 0$, on vérifie aisément l'égalité.

6.

Avec une intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda t} \frac{1}{n!} \underbrace{u_n}_{=f(u)} \underbrace{\mathrm{e}^{-u}}_{=g'(u)} \mathrm{d}u &= \left[\frac{1}{n!} \underbrace{u^n}_{=f(u)} \times \underbrace{(-\mathrm{e}^{-u})}_{=g(u)}\right]_0^{\lambda t} - \int_0^{\lambda t} \frac{1}{n!} \underbrace{nu^{n-1}}_{=f'(u)} \times \underbrace{(-\mathrm{e}^{-u})}_{=g(u)} \mathrm{d}u \\ &= -\frac{(\lambda t)^n \mathrm{e}^{-\lambda t}}{n!} + \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}\mathrm{e}^{-u}}{(n-1)!}\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Donc pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\boxed{P(N_t = n) = \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}\mathrm{e}^{-u}}{(n-1)!}\mathrm{d}u - \left(-\frac{(\lambda t)^n \mathrm{e}^{-\lambda t}}{n!} + \int_0^{\lambda t} \frac{u^{n-1}\mathrm{e}^{-u}}{(n-1)!}\mathrm{d}u\right) = \frac{(\lambda t)^n \mathrm{e}^{-\lambda t}}{n!}.}$$

La formule reste valide pour $n = 0$ d'après la première question. Donc N_t suit [a] une loi de Poisson de paramètre λt.

a. Techniquement, il reste à traiter le cas $N_t = -1$ mais comme la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} P(N_t = k) = 1$, nécessairement, $P(N_t = -1) = 0$.

7. (a)

Une première solution avec `numpy.sum` :

```python
def simulation_S(n,mu):
  X = rd.exponential(1/mu,n)
  S = np.sum(X)
  return S
```

Une seconde solution avec une boucle :

```python
def simulation_S(n,mu):
  S = 0
  for i in range(1,n+1):
    X = rd.exponential(1/mu)
```

```
    S = S + X
  return S
```

(b)

On ne peut malheureusement pas utiliser la fonction précédente : elle ne permet de simuler qu'un S_n à la fois (et pas la liste $S_1, \dots, S_n$) et l'appeler plusieurs fois reviendrait à déterminer des S_n pour des réalisations *différentes*. On procède plutôt ainsi :

```
def simulation_N(t,mu):
  S = 0
  n = -1
  while S <= t:
    X = rd.exponentiel(1/mu)
    S = S + X
    n = n+1
  return n
```

(c)

```
def evolution_S(t,mu):
  L = np.array([])
  S = rd.exponential(1/mu)
  while S <= t :
    # np.append ajoute un element a la fin du tableau
    L = np.append(L,S)
    S = S + rd.exponential(1/mu)
  return L
```

(d)

```
def trace_N(t,mu):
  S = evolution_S(t,mu)
  n = len(S)
  plt.plot([0,S[0]],[0,0])
  for i in range(1,n):
    plot([S[i-1],S[i]],[i,i])
```

(e)

Par lecture graphique, on a $\boxed{N_{3,2} = 3}$ et $\boxed{N_{5,5} = 5}$.
S_2 correspond à la position du saut de la courbe de 2 à 3 et donc $\boxed{S_2 \approx 2,1}$.
X_4 correspond à la différence entre S_4 et S_3 et donc à la longueur du plateau à hauteur 3. On a donc $\boxed{X_4 \approx 4,2 - 3,5 \approx 0,7}$.

Partie II - Définition par $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$

8. (a)

On a : $\boxed{p_0(0) = P(N_0 = 0) = 1}$.

(b)

Pour tout $h \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$, $N_{t+h} - N_t$ et N_h ont la même loi. Donc :

$$P(N_{t+h} - N_t \geq 0) = P(N_h \geq 0).$$

Or N_h est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc est presque sûrement positive. D'où :

$$\boxed{P(N_{t+h} - N_t \geq 0) = P(N_h \geq 0) = 1.}$$

9. (a)

On a pour $t, h \in \mathbb{R}_+$:

$$p_0(t+h) = P(N_{t+h} = 0) = P(N_t + (N_{t+h} - N_t) = 0).$$

Or d'après la question précédente $N_{t+h} - N_t$ est presque sûrement positive. Et N_t est également presque sûrement positive. Pour que la somme soit nulle, il faut donc que les deux soient nulles. D'où :

$$\begin{aligned} p_0(t+h) &= P([N_t = 0] \cap [N_{t+h} - N_t = 0]) \\ &\underset{\text{indépendance}}{=} P(N_t = 0)P(N_{t+h} - N_t = 0) \\ &= P(N_t = 0)P(N_h = 0) \boxed{= p_0(t)p_0(h).} \end{aligned}$$

(b)

Erreur d'énoncé : *Cela n'est vrai que si on suppose $P(N_t = 0) > 0$ pour tout $t > 0$. Sinon, on a simplement la décroissance. L'hypothèse (H_2) est sans doute mal rédigée ou le cas d'égalité à 0 a été oublié.*

Soient $t, t' \in \mathbb{R}_+$ avec $t' > t$. Montrons que $p_0(t) > p_0(t')$.
Pour cela, on pose $h = t' - t$ qui est donc strictement positif. On a donc $t' = t + h$. Puis :

$$p_0(t') = p_0(t+h) = p_0(t)p_0(h).$$

Or $p_0(h) = P(N_h = 0) < 1$. Or $p_0(t) = P(N_t = 0) > 0$. Donc :

$$\boxed{p_0(t') < p_0(t).}$$

<u>p_0 est bien strictement croissante.</u>

(c)

Soit $s \in \mathbb{R}_+$.
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $p_0(0 \times s) = p_0(0) = 1$. Et $(p_0(s))^0 = 1$. <u>Donc la propriété est initialisée.</u>
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $p_0(ns) = p_0(s)^n$. Montrons que $p_0((n+1)s) = p_0(s)^{n+1}$.
  On a :

  $$\begin{aligned} p_0((n+1)s) &= p_0(ns+s) = p_0(ns)p_0(s) \\ &= p_0(s)^n \times p_0(s) \boxed{= p_0(s)^{n+1}.} \end{aligned}$$

  La propriété est héréditaire.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{p_0(ns) = (p_0(s))^n.}$$

Soient désormais $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$p_0(ns) = p_0(s)^n.$$

Et comme tous les termes sont positifs :

$$(p_0(ns))^{1/n} = p_0(s).$$

Et donc pour $s = \frac{m}{n}$, on obtient :

$$(p_0(m))^{1/n} = p_0\left(\frac{m}{n}\right).$$

Donc :

$$\boxed{p_0\left(\frac{m}{n}\right) = (p_0(m))^{1/n} = (p_0(1)^m)^{1/n} = (p_0(1))^{m/n}.}$$

(d)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $p_0(1) = \mathrm{e}^{-\lambda}$ et soit $t \in \mathbb{R}_+^\star$. Il existe donc deux suites (u_n) et (v_n) de rationnels telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq t \leq v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = t.$$

Par décroissance de p_0, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_0(u_n) \geqslant p_0(t) \geqslant p_0(v_n).$$

Or d'après la question précédente :

$$p_0(u_n) = (p_0(1))^{u_n} = (\mathrm{e}^{-\lambda})^{u_n} = \mathrm{e}^{-\lambda u_n}.$$

Et de même $p_0(v_n) = \mathrm{e}^{-\lambda v_n}$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{p_0(u_n)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^{-\lambda t}} \geqslant p_0(t) \geqslant \underbrace{p_0(v_n)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^{-\lambda t}}.$$

Et donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} p_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Or $p_0(t)$ est une constante vis-à-vis de n. Donc :

$$\boxed{p_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.}$$

10. (a)

Comme pour tout $t > 0$, on a $p_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. Comme $p_0(0) = 1$, la formule reste valide en $t = 0$. Et donc on a :

$$\boxed{p_0(h) = 1 - \lambda h + \underset{h\to 0}{o}(h).}$$

(b)

Comme $\mathbb{N} = \{0\} \cup \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2\}$ définit une partition de $\mathbb{N}$ et comme $N_h(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $([N_h = 0], [N_h = 1], [N_h \geq 2])$ est bien un système complet d'événements.
Pour $h \geqslant 0$, on a ainsi :

$$p_1(h) = P(N_h = 1) = 1 - P(N_h = 0) - P(N_h \geqslant 2).$$

Or $P(N_h \geqslant 2) = \underset{h\to 0}{o}(h)$ et $P(N_h = 0) = p_0(h) = 1 - \lambda h + \underset{h\to 0}{o}(h)$. Donc :

$$\boxed{p_1(h) = P(N_h = 1) = 1 - (1 - \lambda h) + \underset{h\to 0}{o}(h) = \lambda h + \underset{h\to 0}{o}(h).}$$

(c)

On a :

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= P(N_{t+h}=n) = P(N_h + (N_{t+h}-N_h) = n) \\ &= P([N_h + (N_{t+h}-N_h) = n] \cap [N_h = 0]) + P([N_h + (N_{t+h}-N_h) = n] \cap [N_h = 1]) \\ &+ P([N_h + (N_{t+h}-N_h) = n] \cap [N_h \geqslant 2]) \\ &= P([N_{t+h}-N_h = n] \cap [N_h = 0]) + P([N_{t+h}-N_h = n-1] \cap [N_h = 1]) \\ &+ P([N_h + (N_{t+h}-N_h) = n] \cap [N_h \geqslant 2]). \end{aligned}$$

Or $0 \leq P([N_h + (N_{t+h}-N_h) = n] \cap [N_h = 2]) \leqslant P(N_h \geqslant 2) = \underset{h\to 0}{o}(h)$. Donc, par indépendance :

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= P(N_{t+h}-N_h = n)P(N_h=0) + P(N_{t+h}-N_h = n-1)P(N_h=1) + \underset{h\to 0}{o}(h) \\ &= P(N_t = n)P(N_h=0) + P(N_t = n-1)P(N_h=1) + \underset{h\to 0}{o}(h) \\ &= \boxed{p_n(t)p_0(h) + p_{n-1}(t)p_1(h) + \underset{h\to 0}{o}(h).} \end{aligned}$$

(d)

Pour $h > 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h} &= \frac{p_n(t)p_0(h) + p_{n-1}(t)p_1(h) + \underset{h\to 0}{o}(h) - p_n(t)}{h} \\ &= \frac{p_n(t)(1-\lambda h) + p_{n-1}(t)\lambda h - p_n(t) + \underset{h\to 0}{o}(h)}{h} \\ &= \frac{\lambda h(p_{n-1}(t)-p_n(t)) + \underset{h\to 0}{o}(h)}{h} \\ &= \boxed{\lambda(p_{n-1}(t)-p_n(t)) + \underset{h\to 0}{o}(1).} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h} = \lambda(p_{n-1}(t)-p_n(t)).$$

De manière similaire :

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{p_n(t-h)-p_n(t)}{-h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{p_n(t)-p_n(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \lambda(p_{n-1}(t-h)-p_n(t-h)). \end{aligned}$$

Il nous faut pour conclure la continuité à gauche de p_n et p_{n-1}. Travaillons pour p_n (p_{n-1} se montre de même). On a pour $h > 0$:

$$p_n(t+h) = p_0(h)p_n(t) + p_1(h)p_{n-1}(t) + \underset{h\to 0}{o}(h).$$

En posant $t' = t+h$, cela s'écrit également :

$$p_n(t') = p_0(h)p_n(t'-h) + p_1(h)p_{n-1}(t'-h) + \underset{h\to 0}{o}(h).$$

Or quand h tend vers 0 (par valeurs positives), on a : $p_1(h) \to 0$ et p_{n-1} qui est borné (par 0 et 1). On a aussi $p_0(h) \to 1$. Donc :

$$\lim_{h\to 0^+} p_0(h)p_n(t'-h) + p_1(h)p_{n-1}(t'-h) + \underset{h\to 0}{o}(h) = \lim_{h\to 0^+} p_n(t'-h).$$

D'où :

$$\lim_{h\to 0^+} p_n(t'-h) = p_n(t').$$

Donc p_n est continue à gauche.
Ainsi :

$$\lim_{h\to 0^+} \lambda(p_{n-1}(t-h)-p_n(t-h)) = \lambda(p_{n-1}(t)-p_n(t)).$$

Et enfin p_n est dérivable en t et :

$$\boxed{p_n'(t) = \lambda(p_{n-1}(t)-p_n(t)).}$$

(e)

q_n est dérivable comme produit et on a :

$$\begin{aligned} q_n'(t) &= \lambda e^{\lambda t} p_n(t) + e^{\lambda t} p_n'(t) \\ &= \lambda e^{\lambda t} p_n(t) + e^{\lambda t}(\lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t))) \\ &= \lambda e^{\lambda t} p_{n-1}(t) \boxed{= \lambda q_{n-1}(t).} \end{aligned}$$

(f)

Rapidement :

- **Initialisation :** On a $q_0(t) = e^{\lambda t} p_0(t) = e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = 1$ et $\frac{(\lambda t)^0}{0!} = 1$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}$. On a alors :

$$q_{n+1}'(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

q_{n+1} est une primitive de q_{n+1}' et donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$q_{n+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} + K.$$

Or $p_{n+1}(0) = P(N_0 = n+1) = 0$ si $n \in \mathbb{N}$. Donc :

$$e^{\lambda \times 0} 0 = q_{n+1}(0) = \frac{(\lambda 0)^{n+1}}{(n+1)!} + K.$$

D'où $K = 0$. On en déduit :

$$\boxed{q_{n+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}.}$$

On a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}.}$$

(g)

N_t est une loi discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{P(N_t = n) = p_n(t) = e^{-\lambda t} q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.}$$

<u>On reconnaît la loi de Poisson de paramètre λt.</u>

11. (a)

On a :

$$S_n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+,\ N_t = 0\}.$$

Or $N_0 = 0$ donc $0 \in \{t \in \mathbb{R}_+,\ N_t = 0\}$ et $S_0 \leq 0$. Comme $S_0 \geq 0$ (puisque 0 est un minorant), on a :

$$\boxed{S_0 = 0}.$$

(b)

Montrons que $[S_1 > t] = [N_t = 0]$ par double inclusion.

- $[S_1 > t] \supset [N_t = 0]$: soit $\omega \in [N_t = 0]$. L'application $s \mapsto N_s(\omega)$ est croissante puisque :

$$N_{s+h}(\omega) = (N_{s+h}(\omega) - N_s(\omega)) + N_s(\omega)$$

et $N_{s+h} - N_s$ est de même loi que N_h qui est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donc $(N_{s+h}(\omega) - N_s(\omega)) \geq 0$. Donc si $s \leqslant S_1(\omega)$ alors $N_s(\omega) \geqslant 1$. Par contraposée, $\boxed{S_1(\omega) > t}$.

- $[S_1 > t] \subset [N_t = 0]$: soit $\omega \in [S_1 > t]$. Montrons par l'absurde que $\omega \in [N_t = 0]$. On suppose donc :

$$N_t(\omega) \neq 0.$$

Comme $S_1(\omega) > t$, on a $N_t(\omega) \neq 1$. Ainsi comme N_t est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a :

$$N_t(\omega) \geqslant 2.$$

Comme $s \mapsto N_s(\omega)$ est croissante, les termes suivants sont également supérieurs à 2 et donc différents de 1. Donc $S_1(\omega) \leqslant t$. Puis $S_1(\omega) \leqslant t < S_1(\omega)$ ce qui est absurde. D'où :

$$\boxed{N_t(\omega) = 0.}$$

On a donc :

$$\boxed{[S_1 > t] = [N_t = 0].}$$

(c)

On a ainsi :

$$\boxed{P(S_1 \leq t) = 1 - P(S_1 > t) = 1 - P(N_t = 0) = 1 - p_0(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}.}$$

(d)

Par croissance de la fonction de répartition, on a $P(S_1 \leq t) = 0$ si $t \leqslant 0$. Donc on reconnaît la loi exponentielle de paramètre λ.

(e)

On va changer légèrement la définition de S_n pour rendre cette question résoluble. On définit désormais S_n par $S_n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \ , \ N_t \geqslant n\}$. Ce changement de définition ne change pas l'interprétation que l'on fait de S_n.
Soit $t \geqslant 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on constate, par des arguments similaires à ceux de la question 11.(b) que les événements $[N_t < n]$ et $[S_n > t]$ sont égaux.
Soit $\omega \in \Omega$ et $k = N_t(\omega)$.
On a alors $\omega \in [N_t < k+1]$ et $\omega \notin [N_t < k]$.
Ainsi $\omega \in [S_{k+1} > t]$ et $\omega \notin [S_n > t]$. C'est-à-dire $S_{k+1}(\omega) > t$ et $S_k(\omega) \leqslant t$.
On va montrer que la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leqslant n$. Supposons par l'absurde que $S_m > S_n$ et soit $t \in]S_n, S_m[$
Par croissance du processus $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ on a va avoir $N_t \geqslant n$ et $N_t < m$, d'où $n \leqslant N_t <$, ce qui est absurde car $m \leqslant n$.
Ainsi la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On a donc

$$\forall n \leqslant k, \qquad S_n(\omega) \leqslant S_k(\omega) \leqslant k$$

$$\forall n \geqslant k+1, \qquad S_n(\omega) \geqslant S_{k+1}(\omega) > t$$

On en déduit que $\{n \in \mathbb{N}, S_n(\omega) \leqslant t\} = [\![0, k]\!]$ et donc

$$\sup\{n \in \mathbb{N}, S_n(\omega) \leqslant t\} = k$$

On vient de montrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$N_t(\omega) = \sup\{n \in \mathbb{N}, S_n(\omega) \leqslant t\}$$

C'est-à-dire $N_t = \sup\{n \in \mathbb{N}, S_n \leqslant t\}$.
En conclusion, on a bien montré que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad N_t = \sup\{n \in \mathbb{N}, S_n \leqslant t\}}$$