# DS5 - EDHEC/ECRICOME

Samedi 23/03/2024 - 4h

**Calculatrice interdite**

1. Les exercices sont indépendants.
2. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
3. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
4. Encadrez ou soulignez vos résultats.

*Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques* `Python` *sont importées comme suit :*

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
```

## Exercice 1 - EDHEC ECS 2019 - Exercice 1

**Partie I - Étude d'un exemple.**

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer un polynôme annulateur de $A$ qui soit de degré 2.

   (b) En déduire les deux valeurs propres possibles $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de $A$ (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).

   (c) En `Python`, la fonction `al.matrix_rank(M)` renvoie le rang de la matrice $M$.

   On a utilisé le code suivant :

```python
A = np.array([[1,0,0],[-2,3,-2],[-1,1,0]])
r1 = al.matrix_rank(A - np.eye(3))
r2 = al.matrix_rank(A - 2*np.eye(3))
print(r1)
print(r2)
```

   et on a obtenu l'affichage :

```
1
2
```

   Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de $f$ et à la dimension des sous-espaces propres associés ?

   (d) Donner une base de chacun des noyaux $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{Id})$.

2. (a) Justifier qu'il existe une base $(u_1, v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^3$, où $(u_1, v_1)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id})$ et $(v_2)$ une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{Id})$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de $u_1$ et la première de $v_1$ étant nulles.

   (b) On note $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de $a$, $b$ et $c$ les coordonnées de $x$ dans la base $(u_1, v_1, v_2)$.

**Partie II - Généralisation.**

Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels tels que $n \geqslant p \geqslant 2$, soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$, et $f$ un endomorphisme diagonalisable de $E$ ayant $p$ valeurs propres $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_p$, deux à deux distinctes.

On se propose de déterminer la décomposition de chaque vecteur $x$ de $E$ sur la somme directe $\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id})$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $E$.

3. Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est une matrice diagonale $D$.
   (a) En notant $I_n$ la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :
   $$(D - \lambda_1 I_n)(D - \lambda_2 I_n) \cdots (D - \lambda_p I_n) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}.$$
   (b) En déduire un polynôme annulateur de $f$.

Pour chaque $k$ de $[\![1,p]\!]$, on définit le polynôme $L_k = \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$.

4. (a) En distinguant les cas $i = k$ et $i \neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.
   (b) Montrer que $(L_1, L_2, \ldots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.
   (c) Établir alors que :
   $$\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X],\ P = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) L_k.$$
   (d) En déduire que $\sum_{i=1}^{p} L_i = 1$.
5. (a) Montrer que, pour tout $x$ de $E$, $L_k(f)(x)$ appartient à $\operatorname{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id})$, où $L_k(f)(x)$ désigne l'image du vecteur $x$ de $E$ par l'endomorphisme $L_k(f)$.
   (b) En déduire la décomposition cherchée.
6. Vérifier que cette dernière décomposition redonne celle obtenue pour l'endomorphisme $f$ de la partie I, si l'on choisit $n = 3$, $E = \mathbb{R}^3$ et $p = 2$.

## Exercice 2 - ECRICOME ECS 2019 - Exercice 1

On considère la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $I_n$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Calculer $I_0$, $I_1$ et $I_2$.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.
   En déduire que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1} = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.
   (d) Compléter la fonction `I` suivante, qui prend en entrée un entier positif $n$, afin qu'elle retourne un tableau `y` qui contient les $2n+2$ premiers termes de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

```python
def I(n):
    u = np.zeros(...)
    u[0] = ...
    u[1] = ...
    for k in range(1,n+1):
        ...
        ...
    return u
```

3. (a) Rappeler un équivalent simple de $x \mapsto \cos(x) - 1$ et $u \mapsto \ln(1+u)$ au voisinage de 0.
   (b) Montrer que $n \ln\left(\cos(n^{-1/4})\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}\sqrt{n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\cos(n^{-1/4})\right)^n$.
   (c) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\cos(n^{-2/3})\right)^n = 1$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ :
$$\int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n \mathrm{d}t \leqslant n^{-1/4}.$$
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ :
$$\int_{n^{-1/4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2} \left(\cos(n^{-1/4})\right)^n.$$
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.
5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ :
$$I_n \geqslant \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n \mathrm{d}t \geqslant n^{-2/3} \left(\cos(n^{-2/3})\right)^n.$$
   En déduire la nature de la série de terme général $I_n$.
   (b) Écrire une fonction `Python` qui prend en paramètre un entier naturel $n$ et qui renvoie le terme de rang $n$ de la suite des sommes partielles associée à la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} I_n$.
6. (a) Montrer que pour tout réel $t$ de $]-\pi, \pi[$ : $\cos(t) + 1 = \dfrac{2}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$.
   (b) À l'aide du changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, montrer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)} = 1$.
   (c) Montrer que pour tout entier $n$ : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)} \mathrm{d}t$.
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)} \mathrm{d}t \right| \leqslant I_{n+1}$.
   (e) En déduire que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} (-1)^k I_k$ est convergente et déterminer sa somme.

## Exercice 3 - EDHEC ECS 2022 - Exercice 2

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique défini par :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3),\ \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$
La norme du vecteur $x$ est définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthogonale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.
On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
On se propose d'étudier l'ensemble $F$ des endomorphismes $f$ de $\mathbb{R}^3$ tels qu'il existe un réel $k$ de $[0, 1[$ pour lequel on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|f(x)\| \leqslant k\|x\|.$$

1. Déterminer l'ensemble $F$ lorsque $k = 0$.
2. Un premier exemple.
   On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$A = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $A^2$ puis en déduire les deux valeurs propres possibles $\lambda$ et $\mu$ de $A$.

(b) Vérifier que $A$ est diagonalisable et en déduire que $\lambda$ et $\mu$ sont bien valeurs propres de $A$.

(c) Justifier, sans les déterminer, que les sous-espaces propres de $f$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

(d) Utiliser ce résultat pour montrer que $f$ appartient à $F$. On pourra écrire un vecteur $x$ quelconque de $\mathbb{R}^3$ sous la forme $x = y + z$, avec $y \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{Id})$ et $z \in \mathrm{Ker}(f - \mu\mathrm{Id})$.

3. Quelques propriétés générales de l'ensemble $F$.

   (a) Vérifier que Id n'appartient pas à $F$.

   (b) Montrer que $F$ n'est pas un espace vectoriel.

   (c) Montrer que $F$ est stable par la loi de composition des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.

   (d) Montrer que si $f$ est un automorphisme de $F$, alors $f^{-1}$ n'appartient pas à $F$.

4. (a) Montrer que $F$ ne contient pas de projecteurs autres que le projecteur nul.

   (b) $F$ contient-il des symétries ?

5. Soit $f$ un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Montrer qu'en posant $k = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|f(x)\| \leqslant k\|x\|$.

   (b) En déduire que $f$ appartient à $F$ si, et seulement si, les valeurs propres de $f$ appartiennent toutes à $]-1,1[$.

6. Un deuxième exemple.

   Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer un polynôme annulateur de $A$ qui soit de degré 3 et donner les valeurs propres possibles de $f$.

   (b) Montrer que $f$ appartient à $F$, puis donner un réel $k$ de $[0,1[$ pour lequel on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|f(x)\| \leqslant k\|x\|.$$

   (c) Compléter le script `Python` suivant pour qu'il permette d'afficher la valeur du réel $k$ défini à la question 5a :

```python
A = np.array([[0,-2,2],[-2,-1,0],[2,0,1]])/6
...
k = ...
print(k)
```

*On rappelle que* `sp, v = al.eig(M)` *permet de récupérer la liste des valeurs propres de $M$ dans* `sp` *et la liste des vecteurs propres associés dans* `v`.

## Problème 4 - EDHEC ECS 2019 - Problème

### Partie I

Dans cette partie, $n$ désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire $X$ prenant ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de $X$, la fonction $G$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k)t^k.$$

1. Calculer $G(1)$.
2. Exprimer l'espérance de $X$ à l'aide de la fonction $G$ ;
3. Établir la relation : $V(X) = G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2$.

**Partie II**

On pose, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^\star$ : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

4. (a) Justifier que, pour tout entier naturel $k$ non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$.
   (b) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star \setminus \{1\}$, $\ln n + \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \ln n + 1$.
   (c) En déduire un équivalent très simple de $u_n$ lorsque $n$ est voisinage de $+\infty$.
5. Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

**Partie III**

Dans cette partie, $n$ désigne toujours un entier naturel non nul.

6. On admet que, si $a$ et $b$ sont entiers tels que $a < b$, l'instruction `rd.randint(a,b+1)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme discrète sur $[\![a, b]\!]$.
   Compléter la fonction suivante pour que les lignes 5, 6, 7 et 8 permettent d'échanger le contenus des variables `A[j]` et `A[p]` :

```
1  def permut(n):
2      A = np.arange(1,n+1)
3      p = n-1
4      for k in range(1,n+1):
5          j = rd.randint(0,p)
6          aux = ...
7          A[j] = ...
8          A[p] = ...
9          p = p-1
10     return A
```

7. On suppose dorénavant qu'après exécution du script précédent correction complété, le tableau `numpy` `A` est rempli de façon aléatoire par les entiers de $[\![1, n]\!]$ de telle sorte que les $n!$ permutations soient équiprobables.
   On considère alors la fonction `Python` suivante :

```
def f(n):
    A = permut(n)
    m = A[0]
    c = 0
    for k in range(1,n):
        if A[k] > m:
            m = A[k]
            c = k
    return c
```

   (a) Expliquer pourquoi, à la fin de la boucle **for**, la variable `m` contient la valeur de `n`.
   (b) Quel est le contenu de la variable `c` renvoyé à la fin de cette fonction ?

On admet que les contenus des variables `A[0]`, `A[1]`, ..., `A[n−1]` sont des variables aléatoires notées $A_0$, $A_1$, ..., $A_{n-1}$ et que le nombre d'affectations concernant la variable informatique $c$ effectuées au cours de la question précédente, y compris la première, est aussi une variable aléatoire, notée $X_n$.
On suppose que ces variables aléatoires sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note $G_n$ la fonction génératrice de $X_n$, $E_n$ son espérance et $V_n$ sa variance.

8. Donner la loi de $X_1$.
9. (a) Montrer que $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
   (b) Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$. En déduire les lois de $X_2$ et $X_3$.
   (c) En considérant le système complet d'événements $([A_{n-1} = n], [A_{n-1} < n])$, montrer que :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall j \in [\![2, n]\!],\ P(X_n = j) = \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j).$$

   (d) Donner la loi de $X_4$.

10. (a) Vérifier que la formule obtenue à la question 9c reste valable pour $j = 1$.

    (b) Établir la relation :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}(t). \quad (\star)$$

    (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t+j).$$

11. En dérivant la relation $(\star)$, trouver une relation entre $E_n$ et $E_{n-1}$ puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ E_n = u_n.$$

12. Recherche d'un équivalent de $V_n$.

    (a) En dérivant une deuxième fois la relation $(\star)$, montrer que :

$$\forall n \geqslant 2,\ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}.$$

    (b) En déduire, pour tout entier naturel $n$ non nul, $V_n$ en fonction de $u_n$ et $h_n$.

    (c) Montrer que $V_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$.