# Correction DM9 - Convergence de variables aléatoires

## Problème 1 - EML ECS 2012

**Partie I - Formule de Stirling.**

1. On a :

$$\boxed{W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^0 \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

et :

$$\boxed{W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^1 \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1.}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n (\cos(t) - 1) \mathrm{d}t.$$

Or pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on a $\cos(t) \in [0, 1]$. Donc $\cos(t)^n(\cos(t) - 1) \leqslant 0$ et par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{W_{n+1} - W_n \leqslant 0}$$

c'est-à-dire $\boxed{(W_n) \text{ est décroissante.}}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Clairement, puisque $(\cos t)^n \geqslant 0$ pour $t \in [0, \pi/2]$, on a $\boxed{W_n \geqslant 0.}$ Il reste à montrer que $W_n \neq 0$.

La fonction $t \mapsto (\cos t)^n$ est continue sur $[0, \pi/2]$ et positive. Donc si $W_n = 0$ alors cette fonction est nulle. Elle est évidemment non nulle et donc $\boxed{W_n \neq 0.}$

Ainsi, $\boxed{W_n > 0.}$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(n+2) W_{n+2} = (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2} \mathrm{d}t = (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} (\cos t) \mathrm{d}t.$$

On pose $u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v(t) = \sin t$. Les fonction $u$ et $v$ sont $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \pi/2]$ et donc on peut procéder à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\cos t)^{n+1}}_{=u(t)} \underbrace{(\cos t)}_{=v'(t)} \mathrm{d}t = \underbrace{\left[ \underbrace{(\cos t)^{n+1}}_{=u(t)} \underbrace{(\sin t)}_{=v(t)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(n+1)(-\sin t)(\cos t)^n}_{=u'(t)} \underbrace{(\sin t)}_{=v(t)} \mathrm{d}t \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n (\sin t)^2 \mathrm{d}t = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n (1 - (\cos t)^2) \mathrm{d}t \\ &= (n+1) \left( W_n - W_{n+2} \right). \end{aligned}$$

En réordonnant les termes, on trouve bien :

$$\boxed{(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n.}$$

(b) Montrons le résultat demandé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** pour $n = 0$, on a :

$$(n+1) W_{n+1} W_n = (0+1) W_{0+1} W_0 = W_1 W_0.$$

Donc la relation est vérifiée au rang 0.

- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0.$$

Calculons :

$$((n+1)+1)W_{(n+1)+1}W_{n+1} = \underbrace{(n+2)W_{n+2}}_{=(n+1)W_n}W_{n+1} = W_1W_0.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\boxed{(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0.}$$

4. (a) On sait que $(W_n)$ est décroissante. Doncc pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant W_{n+2}.$$

Puis, on a $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et donc :

$$\boxed{W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant \frac{n+1}{n+2}W_n.}$$

(b) Puisque $W_n \neq 0$, on peut tout diviser par $W_n$ dans l'inégalité précédente. On a donc :

$$1 \geqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \geqslant \underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1}.$$

Par encadrement, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ et ainsi : $\boxed{W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n.}$

On en déduit :

$$(n+1)W_{n+1}W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)W_n^2.$$

Donc $(n+1)W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} W_1W_0$ puis en divisant par $n+1$ et en remarquant que $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ :

$$W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{W_1W_0}{n}.$$

On peut alors passer à la racine car $W_n > 0$ et l'équivalence est compatible avec l'élévation à une puissance fixée. D'où :

$$\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{W_1W_0}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

puisque $W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$.

5. Montrons la formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $W_{2n} = W_0 = \frac{\pi}{2}$. On a également :

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2\times O)!}{2^{2\times 0}(0!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1\times 1}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

On a donc bien :

$$\boxed{W_{2\times 0} = \frac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}(0!)^2}\frac{\pi}{2}.}$$

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
W_{2(n+1)} &= W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)^2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{(2n+2)^2} \times \frac{(2(n+1))!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2^2(n+1)^2} \times \frac{(2(n+1))!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Donc la propriété est bien héréditaire.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\boxed{W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}.}$$

6. On a :

$$\begin{aligned}
a_n &= -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= -1 + 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit en particulier que :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$

La série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{12n^2}$ est une série de Riemann convergente (car $2 > 1$). Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \text{ est convergente.}}$

7. Soit $n \geqslant 2$. On a :

$$\begin{aligned}
\ln(A_n) - \ln(A_{n-1}) &= \ln\left(\frac{1}{n!}n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{(n-1)!}(n-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-(n-1)}\sqrt{n-1}\right) \\
&= \ln \frac{(n-1)!n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!(n-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-(n-1)}\sqrt{n-1}} \\
&= \ln\left(\frac{n}{n\mathrm{e}} \times \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}} \times \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right) \\
&= -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\frac{n-1}{n} \boxed{= a_n.}
\end{aligned}$$

8. On a pour $N \geqslant 2$ :

$$\sum_{n=2}^{N} a_n = \sum_{n=2}^{N}(\ln A_n - \ln A_{n-1}) = \ln A_N - \ln A_1.$$

Comme la série des $a_n$ converge, la suite des sommes partielles converge. Et donc la suite $(\ln A_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers un certain réel $\lambda$. Par composition avec la fonction continue exp, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (A_n) \text{ converge vers } \ell = \mathrm{e}^{\lambda} > 0.}$

9. (a) Comme $\ell > 0$, on a $A_n \sim \ell$ c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n!}n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell.$$

Par produit et quotient, on en déduit :

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell}n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}.}$$

(b) On sait que :

$$\begin{aligned} W_{2n} &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{\ell}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{2n}}{2^{2n}\left(\frac{1}{\ell}n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}\right)^2}\frac{\pi}{2} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\sqrt{\frac{2}{n}}\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\sqrt{\frac{1}{2n}}\pi. \end{aligned}$$

Or on sait également que :

$$W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Donc $\ell\sqrt{\frac{1}{2n}}\pi \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$. Puis par produits et quotients : $\ell \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Mais $\ell$ est une constante et donc :

$$\boxed{\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.}$$

Cela donne finalement :

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}.}$$

**Partie II - Étude de variables aléatoires.**

10. Vérifions que $f_a$ est une densité :
    - **Positivité.** $\boxed{f_a \text{ est positive.}}$ En effet, pour $x \leqslant 0$, $f_a(x) = 0 \geqslant 0$. Et si $x > 0$, $f_a(x) = \frac{x}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \geqslant 0$ puisque $x > 0$, et exp est positive.
    - **Continuité.** $\boxed{f_a \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$ sauf éventuellement en 0 (on peut vérifier que $f_a$ est en fait continue en 0).
    - **Intégrale.** Sous réserve de convergence, on a :

    $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_a(t)\mathrm{d}t$$

    car $f_a(t) = 0$ si $t \leqslant 0$.
    Pour $A > 0$, on a :

    $$\int_0^A f_a(t)\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{t}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right]_0^A = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2a^2}} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1.$$

    Et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\mathrm{d}t$ converge et :

    $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\mathrm{d}t = 1.}$$

    Donc $\boxed{f_a \text{ est bien une densité.}}$

11. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $F_X$ la fonction de répartition de $X$. On a :

    $$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_a(t)\mathrm{d}t.$$

    Si $x \leqslant 0$, on a alors :

    $$F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0\mathrm{d}t = 0.$$

    Et si $x > 0$, on a :

    $$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_a(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

    Ainsi :

    $$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

12. $X$ admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_a(t)\mathrm{d}t$ converge absolument. Or, $f_a(t) = 0$ si $t < 0$ et donc $tf_a(t)$ est positif. Donc il suffit d'étudier la convergence.
On a, sous réserve de convergence :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf_a(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t.$$
On reconnaît dans l'intégrande l'expression du moment d'ordre deux d'une loi normale $\mathcal{N}(0, a)$. L'intégrale converge donc et on a :
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} tf_a(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}a}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t}_{\text{Utilisation de la parité pour partir de } -\infty} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} \times \underbrace{a^2}_{\text{variance car la loi est centrée}} = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

13. On procède de même en calculant le moment d'ordre 2. On a sous réserve de convergence :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_a(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t.$$
Cette fois-ci, on ne peut pas se ramener à un moment de la loi normale. Il y a deux manières de procéder :

- **Par intégration par partie.** On pose $u(t) = -\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}$ et $v(t) = t^2$. Les fonctions $u$ et $v$ sont bien $\mathcal{C}^1$. Pour $A > 0$, on a :
$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{t^3}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t &= \int_0^A \underbrace{t^2}_{=v(t)} \times \underbrace{\frac{t}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}}_{=u'(t)}\mathrm{d}t \\
&= \left[\underbrace{t^2}_{=v(t)} \times \underbrace{\left(-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right)}_{=u(t)}\right]_0^A - \int_0^A \underbrace{2t}_{=v'(t)} \times \underbrace{\left(-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right)}_{=u(t)}\mathrm{d}t \\
&= A^2\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2a^2}} + 2a^2\int_0^A \frac{t}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t \\
&= A^2\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2a^2}} + 2a^2\left[-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right]_0^A \\
&= \underbrace{A^2\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2a^2}}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}0} + 2a^2\underbrace{\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2a^2}}\right)}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}1} \\
&\xrightarrow[A\to+\infty]{} 2a^2
\end{aligned}$$
où la première limite se trouve par croissance comparée.
Donc $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\mathrm{d}t$ converge et :
$$\boxed{E(X^2) = 2a^2.}$$
Avec la formule de Kœnig-Huygens, on en déduit :
$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2a^2 - a^2\frac{\pi}{2} = a^2 \times \frac{4-\pi}{2}.}$$

- **Par changement de variable.** *Le changement n'étant pas donné, ce n'est probablement pas la méthode attendue par le sujet.*
On procède au changement $u = \frac{t^2}{2a^2}$. La fonction $\varphi : u \mapsto \sqrt{2a^2u}$ est $\mathcal{C}^1$ de dérivée $\varphi' : u \mapsto \frac{2a^2}{2\sqrt{2a^2u}} = \frac{a}{\sqrt{2u}}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus :
$$\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = +\infty.$$

Donc par changement de variable, les intégrales suivantes ont même nature et sont égales en cas de convergence :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{a^2} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2a^2u}^3}{a^2} \mathrm{e}^{-u^2} \frac{a\mathrm{d}u}{\sqrt{2u}}.$$

Or, sous réserve de convergence, on a :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2a^2u}^3}{a^2} \mathrm{e}^{-u^2} \frac{a\mathrm{d}u}{\sqrt{2u}} = 2a^2 \int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u = 2a^2\Gamma(2) = 2a^2(2-1)! = 2a^2.}$$

On conclut de même avec la formule de Kœnig-Huygens :

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2a^2 - a^2\frac{\pi}{2} = a^2 \times \frac{4-\pi}{2}.}$$

14. (a) La fonction $t \mapsto a\sqrt{-2\ln(t)}$ est continue sur $]0,1]$. Donc $\boxed{Z \text{ est bien une variable aléatoire.}}$ Notons $F_Z$ sa fonction de répartition. On a pour $z \in \mathbb{R}$ :

$$F_Z(z) = P(Z \leqslant z) = P(a\sqrt{-2\ln(V)} \leqslant z).$$

Puisque $t \mapsto \sqrt{t}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a pour $z < 0$ $F_Z(z) = 0$. Pour $z \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\left(\sqrt{-2\ln(V)} \leqslant \frac{z}{a}\right) \\
&= P\left(-2\ln(V) \leqslant \left(\frac{z}{a}\right)^2\right) \\
&\quad \text{car } t \mapsto t^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \\
&= P\left(\ln(V) \geqslant -\frac{z^2}{2a^2}\right) \\
&= P\left(V \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a^2}}\right) \\
&\quad \text{car exp est strictement croissante} \\
&= 1 - P\left(V < \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a^2}}\right) \\
&= 1 - P\left(V \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a^2}}\right) \\
&\quad \text{car } V \text{ est à densité} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2a^2}}.
\end{aligned}$$

Donc $F_Z = F_X$ et $\boxed{Z \text{ suit donc bien une loi de Rayleigh.}}$

(b) On peut donc simuler $V$ avec `rd.random` et en déduire $Z$ :

```python
def simul_Z(a):
    V = rd.random()
    Z = a*np.sqrt(-2*np.log(V))
    return Z
```

15. L'urne contient $n$ boules. La $n+1$ boules tirées correspond donc forcément à une boule déjà tirée. Donc $T_n \leqslant n+1$ et :

$$\boxed{P(T_n > n+1) = 0.}$$

16. Commençons par remarquer que $T_n$ est à valeurs dans $[\![2, n]\!]$. On a donc :

$$P(T_n > 0) = 1 \quad \text{et} \quad P(T_n > 1) = 1.$$

Posons pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, l'événement :

$A_i$ : « La boule du tirage $i$ n'a pas été obtenu dans les tirages 1 à $i-1$. »

On a alors :
$$P(T_n > k) = P(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \cdots \cap A_k).$$
Avec la formule des probabilités composées, on obtient :
$$P(T_n > k) = P(A_2)P_{A_2}(A_3)P_{A_2 \cap A_3}(A_4) \times \cdots \times P_{A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k-1}}(A_k).$$
Or pour $i \in [\![2, k]\!]$, on a :
$$P_{A_1 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{i-1}}(A_i) = \frac{n-(i-1)}{n}$$
par équiprobabilité. D'où :
$$\boxed{P(T_n > k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n} = \frac{n!}{n^k(n-k)!}.}$$

17. On a :
$$P(Y_n > y) = P\left(\frac{T_n}{\sqrt{n}} > y\right) = P(T_n > y\sqrt{n}).$$
Or $T_n$ est à valeurs entières donc $P(k_n < T_n \leqslant y\sqrt{n}) = 0$. Puis :
$$\boxed{P(Y_n > k_n) = \underbrace{P(y\sqrt{n} \geqslant T_n > k_n)}_{=0} + P(T_n > y\sqrt{n}) = P(T_n > y\sqrt{n}) = P(Y_n > y).}$$

18. On a maintenant :
$$P(Y_n > y) = P(Y_n > k_n) = \frac{n!}{n^{k_n}(n-k_n)!}.$$
Avec la formule de Stirling, on a :
$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}.$$
Comme $n - k_n \leqslant n - y\sqrt{n} \to +\infty$, on a également :
$$(n-k_n)! \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-(n-k_n)}(n-k_n)^{n-k_n}\sqrt{2\pi(n-k_n)}.$$
On en déduit :
$$\begin{aligned} P(Y_n > y) &\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{k_n}} \times \frac{\mathrm{e}^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}^{-(n-k_n)}(n-k_n)^{n-k_n}\sqrt{2\pi(n-k_n)}} \\ &\underset{n \to +\infty}{\sim} \boxed{\mathrm{e}^{-k_n}\left(\frac{n}{n-k_n}\right)^{n-k_n}\sqrt{\frac{n}{n-k_n}}.} \end{aligned}$$
Or on a :
$$k_n \leqslant \sqrt{n}y < k_n + 1.$$
On en déduit :
$$\sqrt{n}y - 1 < k_n \leqslant \sqrt{n}y.$$
En divisant par $\sqrt{n}y$, on a :
$$\underbrace{1 - \frac{1}{\sqrt{n}y}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1} < \frac{k_n}{\sqrt{n}y} \leqslant 1.$$
Par encadrement, on en déduit que $\frac{k_n}{\sqrt{n}y} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et ainsi :
$$\boxed{k_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{n}y.}$$
Donc :
$$\frac{n}{n-k_n} = \frac{1}{1 - \frac{k_n}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$
D'où finalement :
$$\boxed{P(Y_n > y) \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-k_n}\left(\frac{1}{1-\frac{k_n}{n}}\right)^{n-k_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-k_n}\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}.}$$

19. (a) On a :

$$\begin{aligned}-t+(t-1)\ln(1-t) &= -t+(t-1)\left(-t-\frac{t^2}{2}+\underset{t\to0}{o}\left(t^2\right)\right)\\ &= -t-t^2+t+\frac{t^2}{2}+\underset{t\to0}{o}\left(t^2\right)\\ &= \boxed{-\frac{t^2}{2}+\underset{t\to0}{o}\left(t^2\right).}\end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}-k_n+(k_n-n)\ln\left(\frac{k_n}{n}-1\right) &= n\left(-\frac{k_n}{n}+\left(\frac{k_n}{n}-1\right)\ln\left(1-\frac{k_n}{n}\right)\right)\\ &= n\left(-\frac{k_n^2}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{k_n^2}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{k_n^2}{2n}.\end{aligned}$$

Et nous avons montré précédemment que $k_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y\sqrt{n}$. Donc :

$$\boxed{-k_n+(k_n-n)\ln\left(\frac{k_n}{n}-1\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{y^2}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\frac{y^2}{2}.}$$

20. Pour $y \leqslant 0$, comme $Y_n > 0$ on a :

$$P(Y_n \leqslant y) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(X \leqslant y)$$

si on pose $a = 1$. Pour $y > 0$, on a :

$$P(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-k_n}\left(1-\frac{k_n}{n}\right)^{k_n-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Et donc :

$$P(Y_n \leqslant y) = 1 - P(Y_n > y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} = P(X \leqslant y)$$

avec la même condition $a = 1$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$ entier puisque $X$ est à densité), on a $P(Y_n \leqslant y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(X \leqslant y)$ et donc :

$$\boxed{Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X}$$

$\boxed{\text{avec la condition } a = 1.}$