Correction DS5 - EDHEC/ECRICOME

Exercice 1 - EDHEC ECS 2019 - Exercice 1

Partie I - Étude d'un exemple.

1. (a) On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 3A - 2I$.

$\boxed{P(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2) \text{ est un polynôme de degré 2 annulateur de } A.}$

(b) On a $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\}$ et donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, 2\}.}$

(c) Les valeurs propres de f sont égales à celles de A.
Pour λ réel, on note $E_\lambda = \ker(f - \lambda \mathrm{Id})$.
Avec le théorème du rang, $\dim E_\lambda = 3 - \mathrm{rg}(A - \lambda I_3)$. On peut donc conjecturer que 1 et 2 sont effectivement valeurs propres de f et que $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_2 = 1$.

(d) $(A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 & = x_1 + x_3 \\ x_1 & \in \mathbb{R} \\ x_3 & \in \mathbb{R} \end{cases}$ et l'espace propre associé à la valeur propre 1 est $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et forment une famille libre.

$\boxed{1 \in \mathrm{Sp}(f) \text{ et } ((1,1,0),(1,0,-1)) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}).}$

$(A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_2 & = 2x_3 \end{cases}$ et $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$\boxed{2 \text{ est valeur propre de } f \text{ et } ((0,2,1)) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}).}$

2. (a) On a montré que les valeurs propres de f sont 1 et 2, et la somme des dimensions des espaces propres de f vaut 3, soit $\dim \mathbb{R}^3$. f est donc diagonalisable et $\ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$. La concaténation de bases de chacun des espaces propres est une base de $\mathbb{R}^3$.

Pour respecter les conditions imposées, changeons la base trouvée pour E_1.

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et la famille en jeu est encore libre. Prenons donc :

$$u_1 = (1,1,0), \quad v_1 = (0,1,1), \quad v_2 = (0,1,2)$$

(u_1, v_1) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et v_2 est une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$. Leur concaténation (u_1, v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ssi $\begin{cases} a + \lambda + 2\gamma = b \\ \lambda + \gamma = c \end{cases}$.
On trouve en résolvant ce système :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a - b + 2c) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-a + b - c) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x = (a, b, c)$ a pour coordonnées $a,\ a - b + 2c,\ -a + b - c$ dans la base (u_1, v_1, v_2).

Partie II - Généralisation.

3. (a) Posons $P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\dots(X - \lambda_p)$. On cherche à calculer $P(D)$.
Comme D est une matrice diagonale, de coefficients diagonaux $d_{1,1}, \dots, d_{n,n}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$D^k = \begin{pmatrix} d_{1,1}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{2,2}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{n,n}^k \end{pmatrix}$, et par règles de calcul matriciel, pour $a_0, a_1, \dots, a_p$ réels :

$$a_0 I + a_1 D + \cdots + a_p D^p = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{p} a_k d_{1,1}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{p} a_k d_{2,2}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{k=0}^{p} a_k d_{n,n}^k \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que $P(D) = \begin{pmatrix} P(d_{1,1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(d_{2,2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(d_{n,n}) \end{pmatrix}$.
La matrice diagonale D est une matrice qui comporte sur sa diagonale les valeurs propres de f : pour tout i, $d_{i,i} \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$, donc tous les coefficients diagonaux de D sont des racines de P.
Finalement, $P(D) = 0$.
$\boxed{(D - \lambda_1 I_n)(D - \lambda_2 I_n)\dots(D - \lambda_p I_n) = 0}$

(b) Le polynôme P présenté en question précédente est donc annulateur de D et

$$0 = P(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \underset{\text{cours}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f)) \text{ et donc } P(f) = 0$$

$\boxed{(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\dots(X - \lambda_p) \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$

4. (a) Pour k fixé dans $[\![1, p]\!]$, les racines de L_k sont $1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, p$ (on les a facilement car L_k est sous forme factorisée). Pour $i \in [\![1, p]\!]$, $i \neq k$, $L_k(\lambda_i) = 0$.
Par produit de termes valant 1, $L_k(\lambda_k) = 1$.

$$\boxed{L_k(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}}$$

(b)
- Le degré de chaque polynôme L_k est $p - 1$, donc la famille $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est bien une famille de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.
- Montrons que cette famille est libre. Soient $a_1, a_2, \dots, a_p$ des réels tels que $a_1 L_1 + a_2 L_2 + \cdots + a_p L_p = 0$.
On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) + \cdots + a_p L_p(x) = 0$. En évaluant en $x = \lambda_i$ et en utilisant a., on trouve $a_i = 0$.
Les réels sont tous nuls et la famille $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est libre.
- $\mathrm{card}(L_1, L_2, \dots, L_p) = p = \dim \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Par ces trois points, $\boxed{(L_1, L_2, \dots, L_p) \text{ est une base de } \mathbb{R}_{p-1}[X]}$.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$. En utilisant la base précédente, il existe des réels $a_1, a_2, \dots, a_p$ tels que $P = a_1 L_1 + a_2 L_2 + \cdots + a_p L_p$.
On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) + \cdots + a_p L_p(x)$. En évaluant en $x = \lambda_i$ et en utilisant a., on trouve $P(\lambda_i) = a_i$. Donc $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X], \quad P = \sum\limits_{i=1}^{p} P(\lambda_i) L_i}$

(d) On applique la question précédente au polynôme constant égal à 1, qui appartient à $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

$\boxed{\sum_{i=1}^{p} L_i = 1}$

5. (a) Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}(f-\lambda_k\mathrm{Id})(L_k(f)(x)) &= ((f-\lambda_k\mathrm{Id})\circ L_k(f))(x)\\ &= c_k((f-\lambda_k\mathrm{Id})\circ Q(f))(x)\end{aligned}$$

$$\text{où } c_k = \prod_{j\in[\![1,p]\!],\, j\neq k} \frac{1}{\lambda_k-\lambda_j} \text{et où } Q = \prod_{j\in[\![1,p]\!],\, j\neq k} (X-\lambda_j)$$

$$\begin{aligned}(f-\lambda_k\mathrm{Id})(L_k(f)(x)) &= c_k((X-\lambda_k)\times Q)(f)(x) = c_kP(f)(x)\\ &= 0 \text{ par 3.b.}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{pour tout } x\in E,\ L_k(f)(x)\in\ker(f-\lambda_k\mathrm{Id})}$.

(b) Par 4.d. en l'endomorphisme f, $\sum_{i=1}^{p} L_i(f) = \mathrm{Id}$.
Soit $x \in E$. On applique l'endomorphisme précédent en x :

$$x = \mathrm{Id}(x) = \sum_{i=1}^{p} L_i(f)(x)$$

Par la question précédente, pour tout i, $L_i(f)(x) \in \ker(f-\lambda_i\mathrm{Id})$. Ce qui précède constitue donc la décomposition d'un vecteur x de E dans la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{p}\ker(f-\lambda_i\mathrm{Id})$.

6. Ici $p=2$, il y a deux polynômes : $L_1 = \frac{X-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} = 2-X$ et $L_2 = \frac{X-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} = X-1$. Soit $x=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Par 5.,

$$x = (2\mathrm{Id}-f)(x) + (f(x)-x)$$

Comme

$$\begin{aligned}(2I-A)X &= \begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&2\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\2a-b+2c\\a-b+2c\end{pmatrix}\\ &= a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + (a-b+2c)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\\ \text{et } (A-I)X &= \begin{pmatrix}0&0&0\\-2&2&-2\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (-a+b-c)\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

on retrouve bien $x = au_1 + (a-b+2c)v_1 + (-a+b-c)v_2$.

Exercice 2 - ECRICOME ECS 2019 - Exercice 1

1. La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ ainsi que la fonction polynomiale $u\mapsto u^n$ donc par composition la fonction $t\mapsto(\cos t)^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc on peut l'intégrer sur le segment $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et I_n est bien définie.

On a $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Pour la suite on utilise la relation $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ vraie pour tout a,b dans $\mathbb{R}$. On a en particulier $\cos(2a) = \cos(a)^2-\sin(a)^2 = \cos(a)^2+\cos(a)^2-1 = 2\cos(a)^2-1$.
Donc $\cos(a)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2a)+1)$.

Par conséquent $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^2\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(\cos(2t)+1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)+t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

2. (a) On calcule le signe de

$$\begin{aligned} I_{n+1}-I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1}\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos t)^{n+1} - (\cos t)^n\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - 1)(\cos t)^n \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos(t) \leq 1$ donc $(\cos t - 1)(\cos t)^n \leq 0$. En intégrant selon t sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $0 \leq \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$I_{n+1} - I_n \leq 0.$$

Donc la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos(t)$, en intégrant selon t sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $0 \leq \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$0 \leq I_n.$$

Donc la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc $\boxed{\text{elle converge}}$.

(b) On remarque $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1}\cos(t)\mathrm{d}t$.

On pose $u'(t) = \cos(t)$ et $u(t) = \sin(t)$ puis $v(t) = (\cos t)^{n+1}, v'(t) = (n+1)(-\sin(t))(\cos t)^n$, les fonctions u, v sont C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$I_{n+2} = \left[\sin(t)(\cos t)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(-\sin(t))(\cos t)^n \sin(t)\mathrm{d}t = 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2(\cos t)^n \mathrm{d}t$$

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(t)^2)(\cos t)^n\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2}\mathrm{d}t = (n+1)(I_n - I_{n+2}).$$

Bilan : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}).}$

(c) Ce qui précède assure que $I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$ donc $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ donc $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.

On pose alors $\mathcal{H}_n : \left(I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}\right)$.

Avec $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, on voit que $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie, on a alors

$$I_{2(n+1)} = I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}I_{2n} \underset{\mathcal{H}_n}{=} \frac{2n+1}{2n+2}\times\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} = \underbrace{\frac{2n+2}{2(n+1)}}_{=1}\times\frac{2n+1}{2(n+1)}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2(n+1))!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

Puis

$$I_{2(n+1)+1} = I_{2n+1+2} = \frac{2n+2}{2n+3}I_{2n+1} \underset{\mathcal{H}_n}{=} \frac{2n+2}{2n+3}\times\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2n+2}{2n+3}\times\underbrace{\frac{2n+2}{2(n+1)}}_{=1}\times\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{\left(2^{n+1}(n+1)!\right)^2}{(2(n+1)+1)!}.$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \mathcal{H}_n \text{ est vraie.}}$

(d)

```python
def I(n):
    u = np.zeros(2*n+2)
    u[0] = np.pi/2
    u[1] = 1
    for k in range(1,n+1):
        u[2*k] = (2*k-1)*u[2*(k-1)]/(2*k)
        u[2*k+1] = (2*k)*u[2*(k-1)+1]/(2*k+1)
```

3. (a) Le cours dit que $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ et $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < n^{-1/4} \leq 1$ donc $0 < \cos(n^{-1/4}) < 1$ et on peut composer par ln. Ainsi $n\ln(\cos(n^{-1/4})) = n\ln\left(1+\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)-1\right)$ or $\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \underset{+\infty}{\to} 0$ donc

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{1/2}} = -\frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\to} 0$$

donc $n\ln(\cos(n^{-1/4})) \underset{+\infty}{\sim} n \times \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)-1\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{n}{2\sqrt{n}} = -\frac{\sqrt{n}}{2}$.

On en déduit que $n\ln(\cos(n^{-1/4})) \underset{+\infty}{\to} -\infty$, en composant cette limite par exponentielle, il vient

$$\exp\left(n\ln\left(\cos(n^{-1/4})\right)\right) = \left(\cos(n^{-1/4})\right)^n \underset{+\infty}{\to} 0.$$

(c) Avec un raisonnement analogue,

$$\cos\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{4/3}} \underset{+\infty}{\to} 0$$

donc $n\ln(\cos(n^{-2/3})) \underset{+\infty}{\sim} n \times \left(\cos\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)-1\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{n}{2n^{4/3}} = -\frac{1}{2n^{1/3}}$.

On en déduit que $n\ln(\cos(n^{-2/3})) \underset{+\infty}{\to} 0$, en composant cette limite par exponentielle, il vient

$$\exp\left(n\ln\left(\cos(n^{-2/3})\right)\right) = \left(\cos(n^{-2/3})\right)^n \underset{+\infty}{\to} 1.$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, sur $[0; n^{-1/4}]$, $(\cos t)^n$ est dominé par 1 donc en intégrant avec $0 < n^{-1/4}$, on a

$$\int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n \mathrm{d}t \leq \int_0^{n^{-1/4}} 1\mathrm{d}t = n^{-1/4}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, sur $\left[n^{-1/4}; \frac{\pi}{2}\right]$, $t \mapsto (\cos t)^n$ est décroissante donc dominée par $\left(\cos(n^{-1/4})\right)^n$ donc en intégrant avec $n^{-1/4} < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\int_{n^{-1/4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t \leq \int_{n^{-1/4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(n^{-1/4})\right)^n \mathrm{d}t = \left(\cos(n^{-1/4})\right)^n \times \left(\frac{\pi}{2} - n^{-1/4}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\cos(n^{-1/4})\right)^n.$$

(c) On utilise la relation de Chasles, les questions 3(b), 4(a), 4(b) et le fait que I_n est positive,

$$0 \leq I_n = \int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n \mathrm{d}t + \int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} (\cos t)^n \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^{1/4}} + \frac{\pi}{2}\left(\cos(n^{-1/4})\right)^n \underset{+\infty}{\to} 0.$$

Donc par encadrement $\boxed{I_n \underset{+\infty}{\to} 0.}$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise la relation de Chasles

$$I_n = \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n \mathrm{d}t + \int_{n^{-2/3}}^{\pi/2} (\cos t)^n \mathrm{d}t.$$

Sur $\left[n^{-2/3}, \pi/2\right]$, cosinus est positif donc, avec des bornes dans l'ordre croissant, on a $\displaystyle\int_{n^{-2/3}}^{\pi/2} (\cos t)^n \mathrm{d}t \geq 0$.

Donc $I_n \geq \displaystyle\int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$, on utilise une fois de plus le fait que $t \mapsto (\cos t)^n$ est décroissante sur $\left[0; n^{-2/3}\right]$ pour minorer,

$$I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n \mathrm{d}t \geq \left(\cos\left(n^{-2/3}\right)\right)^n \int_0^{n^{-2/3}} 1\mathrm{d}t = \left(\cos\left(n^{-2/3}\right)\right)^n n^{-2/3}.$$

A la question 3(c), il est vu que $\left(\cos(n^{-2/3})\right)^n \underset{+\infty}{\to} 1$ donc $\left(\cos\left(n^{-2/3}\right)\right)^n n^{-2/3} \underset{+\infty}{\sim} n^{-2/3} = \frac{1}{n^{2/3}}$.

Or $\frac{2}{3} < 1$ donc la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2/3}}$ diverge donc par comparaison des séries à terme général positif, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\cos\left(n^{-2/3}\right)\right)^n n^{-2/3}$ diverge et par comparaison la série $\boxed{\sum\limits_{n\geq 1} I_n \text{ diverge.}}$

(b)

```
def somme(n):
    S = np.pi/2
    T = I((n-1)//2)
    for k in range(n):
        S = S + T[k]
    return S
```

6. (a) Soit $t \in]-\pi, \pi[$, $\frac{2}{1+\tan^2(\frac{t}{2})} = \frac{2}{1+\frac{\sin^2(\frac{t}{2})}{\cos^2(\frac{t}{2})}} = \frac{2\cos^2(\frac{t}{2})}{\cos^2(\frac{t}{2})+\sin^2(\frac{t}{2})} = 2\cos^2(\frac{t}{2}) = \cos(t)+1$.

(b) La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+\cos(t)}$ est continue sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t$ est bien définie. On applique le changement de variables $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ de classe C^1 avec $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t$.
Avec $t=0, u=0$ et avec $t=\frac{\pi}{2}, u=1$, donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t = \int_0^1 1\mathrm{d}u = 1.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on utilise la linéarité de l'intégration,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k = \sum_{k=0}^{n}\int_0^{\pi/2}(-1)^k(\cos(t))^k\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\sum_{k=0}^{n}(-\cos(t))^k\mathrm{d}t.$$

Or sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $-\cos(t) \neq 1$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n}(-\cos(t))^k = \frac{1-(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)}$. De plus la fonction $t \mapsto \frac{-(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)}$ est continue sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2}\frac{-(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t$$

(d) On utilise la positivité de l'intégration avec le fait que $0 < \frac{\pi}{2}$,

$$\left|\int_0^{\pi/2}\frac{-(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{\pi/2}\left|\frac{-(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)}\right|\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\frac{|\cos(t)|^{n+1}}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos(t)^{n+1}}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t.$$

On a $|\cos(t)|^{n+1} = \cos(t)^{n+1}$ car cos est positif sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On a aussi avec cet argument que, pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{1}{1+\cos t} \leq 1$ donc en multiplinat par $\cos(t)^{n+1}$ positif on a $\frac{\cos(t)^{n+1}}{1+\cos(t)} \leq \cos(t)^{n+1}$, puis en intégrant toujours avec des bornes dans l'ordre croissant, il vient

$$\left|\int_0^{\pi/2}\frac{-(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{\pi/2}\cos(t)^{n+1}\mathrm{d}t = I_{n+1}.$$

(e) On en déduit avec 6(c) puis 6(b) que

$$\left|\int_0^{\pi/2}\frac{-(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k - \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k - 1\right| \leq I_{n+1}.$$

Or la suite (I_k) converge vers 0 selon 4(c), donc par encadrement

$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k - 1\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ donc } \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Conclusion : $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{k\geq 0}(-1)^k I_k \text{ converge et sa somme vaut } 1.}$

Exercice 3 - EDHEC ECS 2022 - Exercice 2

1. On suppose $k=0$. Soit $f \in F$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leqslant 0 \times \|x\| = 0.$$

Donc $\|f(x)\| = 0$ puis $f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Donc $f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.
On vient de prouver l'inclusion :

$$\boxed{F \subset \{0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}\}.}$$

On vérifie facilement que $0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} \in F$ et donc :

$$\boxed{F = \{0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}\}.}$$

2. (a) On calcule :

$$\begin{aligned}
A^2 &= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} \times \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{27^2}\begin{pmatrix} 1+64+16 & -8-8+16 & 4-32+28 \\ -8-8+16 & 64+1+16 & -32+4+28 \\ 4-32+28 & -32+4+28 & 16+16+49 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{27^2}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} \boxed{= \frac{1}{9} I_3.}
\end{aligned}$$

On en déduit que $X^2 - \frac{1}{9}$ est un polynôme annulateur de A. Et comme $X^2 - \frac{1}{9} = \left(X - \frac{1}{3}\right)\left(X + \frac{1}{3}\right)$, on a :

$$\boxed{\operatorname{Sp}(A) \subset \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}.}$$

(b) A est symétrique et donc $\boxed{\text{diagonalisable.}}$
Ainsi A admet au moins une valeur propre. De plus si A admettait une unique valeur propre a, elle serait alors semblable à aI_3. Mais la seule matrice semblable à aI_3 est aI_3. Or $A \neq aI_3$ (quel que soit $a \in \mathbb{R}$). Donc A admet au moins 2 valeurs propres.
Donc avec l'inclusion précédente, on en déduit :

$$\boxed{\operatorname{Sp}(A) = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}.}$$

(c) Comme A est symétrique et que c'est la matrice de f dans une base orthonormée, f est symétrique. Ainsi ses espaces propres sont orthogonaux.
De plus, comme f est diagonalisable, on a :

$$\bigoplus_{a \in \operatorname{Sp}(f)} E_a(f) = \mathbb{R}^3.$$

Comme on a $\operatorname{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$, on peut écrire :

$$\boxed{E_\lambda(f) \oplus E_\mu(f) = \mathbb{R}^3.}$$

Donc $\boxed{\text{les sous-espaces propres de } f \text{ sont bien supplémentaires et orthogonaux.}}$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}^3$. D'après la décomposition précédente, on peut écrire :

$$x = y + z$$

où $y \in E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$ et $z \in E_\mu(f) = \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{Id})$.
On a donc :

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|^2 &= \|f(y+z)\|^2 \\
&= \|f(y) + f(z)\|^2 \\
&= \|\lambda y + \mu z\|^2 \\
&= \|\lambda y\|^2 + \|\mu z\|^2 (\text{théorème de Pythagore}) \\
&= \underbrace{|\lambda|}_{=1/3} \|y\|^2 + \underbrace{|\mu|}_{=1/3} \|z\|^2 \\
&= \frac{1}{3}\|x\|^2 (\text{théorème de Pythagore})
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\|f(x)\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\|x\|.}$$

Et donc $\boxed{f \in F.}$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\|\mathrm{Id}(x)\| = \|x\| > k\|x\|$$

pour tout $k \in [0,1[$. Donc $\boxed{\mathrm{Id} \notin F.}$

(b) On peut vérifier en revanche que $\frac{1}{2}\mathrm{Id} \in F$. En effet pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\|\frac{1}{2}\mathrm{Id}(x)\| = \|\frac{1}{2}x\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\|.$$

Si F était un espace vectoriel, on aurait alors :

$$2 \times \frac{1}{2}\mathrm{Id} = \mathrm{Id} \in F.$$

Mais on vient de voir que c'est $\boxed{\text{faux.}}$ Donc $\boxed{F \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$

(c) Soient f et $g \in F$. Il existe donc $k, k' \in [0,1[$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leqslant k\|x\| \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}^3, \|g(y)\| \leqslant k'\|y\|.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\|g \circ f(x)\| \leqslant k'\|f(x)\| \leqslant \underbrace{k'k}_{\in[0,1[} \|x\|.$$

Donc $\boxed{g \circ f \in F.}$

(d) Soit $f \in F$ également automorphisme. Il existe $k \in [0,1[$ tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}^3, \|f(y)\| \leqslant k\|y\|.$$

On peut même affirmer $k \neq 0$, sinon $f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et n'est pas un automorphisme.
Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\underbrace{\|f(f^{-1}(x))\|}_{=\|x\|} \leqslant k\|f^{-1}(x)\|.$$

On a donc :

$$\|f^{-1}(x)\| \geqslant \underbrace{\frac{1}{k}}_{>1} \|x\| > k'\|x\|$$

pour tout $k' \in [0,1[$. Donc $\boxed{f^{-1} \notin F.}$

4. (a) Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
On suppose $p \neq 0$. Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$ avec $x \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. On a :

$$\|p(x)\| = \|x\| > k\|x\|$$

pour tout $k \in [0, 1[$. Donc $\boxed{p \notin F.}$

(b) Soit s une symétrie de $\mathbb{R}^3$.
Rappel : une symétrie s de $\mathbb{R}^3$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
Si $s \in F$ alors par stabilité par composition, on a $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = s \circ s \in F$. Or $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \notin F$.
Donc $\boxed{F \text{ ne contient pas de symétrie.}}$

5. (a) f est symétrique donc diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ orthonormée telle que :

$$f(e_1) = \lambda_1 e_1, \quad f(e_2) = \lambda_2 e_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = \lambda_3 e_3$$

où $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.
Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On écrit :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
\|f(x)\|^2 & = & \|f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)\|^2 \\
& = & \|x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3)\|^2 \\
& = & \|x_1\lambda_1 e_1 + x_2\lambda_2 e_2 + x_3\lambda_3 e_3\|^2 \\
& = & (x_1\lambda_1)^2 + (x_2\lambda_2)^2 + (x_3\lambda_3)^2 \\
& & \text{(formule de la norme en base orthonormée)} \\
& \leqslant & k^2x_1^2 + k^2x_2^2 + k^2x_3^2 \\
& & (\text{car } k = \max\{|\lambda_i|\}) \\
& \leqslant & k^2\|x\|^2.
\end{array}$$

D'où :

$$\boxed{\|f(x)\| \leqslant k\|x\|}$$

puisque $\sqrt{k^2} = |k| = k$.

(b) Les notations de l'énoncé ne sont pas géniales car on a deux k différents... Notons plutôt :

$$\lambda_{\max} = \max\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}.$$

Par double implication :
($\Leftarrow$) Supposons que $\mathrm{Sp}(f) \subset]-1, 1[$. Dans ce cas, on a : $\lambda_{\max} \in [0, 1[$. Puis pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\|f(x)\| \leqslant \lambda_{\max}\|x\|$$

et donc $\boxed{f \in F}$ en posant $k = \lambda_{\max}$.
($\Rightarrow$) Supposons que $f \in F$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$ un vecteur propre pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ avec $|\lambda|$ maximale. On a :

$$f(x) = \lambda x$$

et :

$$\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$$

Donc :

$$|\lambda| \underbrace{\|x\|}_{>0} \leqslant k \underbrace{\|x\|}_{>0}$$

c'est-à-dire : $\boxed{|\lambda| \leqslant k < 1.}$
Et comme $|\lambda|$ est maximal, pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(f)$, on a $|mu| < 1$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) \subset]-1, 1[.}$$

6. (a) En calculant, on trouve :

$$A^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $A^3 - \frac{1}{4}A = 0$ et donc que $\boxed{X^3 - \frac{1}{4}X \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$
Comme $X^3 - \frac{1}{4}X = X\left(X^2 - \frac{1}{4}\right) = X\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)$, on a :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}.}$$

(b) A est symétrique et comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, on en déduit que f est symétrique. On a :

$$\mathrm{Sp}(f) \subset \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\} \subset]-1, 1[.$$

Donc, d'après la question précédente, $\boxed{f \in F.}$
La démonstration montrait qu'il suffisait de prendre k égal à la valeur absolue la plus grande parmi les valeurs propres. On peut donc prendre $\boxed{k = \frac{1}{2}.}$
Il est possible que $\frac{1}{2} \notin \mathrm{Sp}(f)$, mais même dans ce cas, k majore la valeur absolue des valeurs propres et le même calcul s'applique.

(c)
```
A = np.array([[0,-2,2],[-2,-1,0],[2,0,1]])/6
sp, v = al.eig(M)
k = np.max(np.abs(sp))
print(k)
```

Problème 4 - EDHEC ECS 2019 - Problème

Partie I

1. $G(1) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k) = 1$ car X est à valeurs dans $[\![1, n]\!]$.
2. G est une fonction polynomiale donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour t réel,

$$G'(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)kt^{k-1} \text{ et en particulier, } G'(1) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)k = E(X)$$

$\boxed{E(X) = G'(1)}$

3. G est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
Si $n = 1$, $G'(t) = P(X = 1)$ et $G''(t) = 0$.
Si $n \geqslant 2$, $G'(t) = P(X = 1) + \sum_{k=2}^{n} kP(X = k)t^{k-1}$ et pour t réel :

$$G''(t) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X = k)t^{k-2}$$

puis $G''(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)P(X = k) - 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $G''(1) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)P(X = k)$. Par le théorème du transfert,

$$G''(1) = E(X(X-1))$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} G''(1)+G'(1) &= E(X(X-1))+E(X) \\ &= E(X(X-1)+X) \text{ par linéarité de l'espérance} \\ &= E(X^2) \\ G''(1)+G'(1)-(G'(1))^2 &= E(X^2)-(E(X))^2 \\ &= V(X) \text{ par la formule de Koenig-Huygens} \end{aligned}$$

$\boxed{V(X)=G''(1)+G'(1)-(G'(1))^2}$

Partie II

4. (a) Soit un entier naturel k non nul. Pour $t\in[k,k+1]$, on a $\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{k}$. Par « croissance de l'intégrale » :

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}t$$

$$\text{ainsi } (k+1-k)\frac{1}{k+1}\leqslant[\ln t]_k^{k+1}\leqslant(k+1-k)\frac{1}{k}$$

$\boxed{\text{Pour tout } k\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1}\leqslant\ln(k+1)-\ln k\leqslant\frac{1}{k}.}$

(b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geqslant2$. On somme les inégalités de a. pour k allant de 1 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}(\ln(k+1)-\ln k)\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

et par télescopage : $\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\leqslant\ln n-\ln 1\leqslant(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k})-\frac{1}{n}$,

puis $u_n-1\leqslant\ln n\leqslant u_n-\frac{1}{n}$.

$\boxed{\text{Pour } n\geqslant2,\ \ln n+\frac{1}{n}\leqslant u_n\leqslant\ln n+1.}$

(c) Pour $n\geqslant2$, $\ln n>0$, et l'encadrement précédent nous donne :

$$1+\frac{1}{n\ln n}\leqslant\frac{u_n}{\ln n}\leqslant1+\frac{1}{\ln n}$$

Sans forme indéterminée, les deux suites encadrantes tendent vers 1.
Par le théorème d'encadrement, $\lim\frac{u_n}{\ln n}=1$.

$\boxed{\text{Un équivalent de } u_n \text{ est } \ln n.}$

5. (h_n) est la suite des sommes partielles de la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$. Comme $2>1$, cette série converge, et donc (h_n) admet une limite finie.

$\boxed{\text{La suite } (h_n) \text{ est convergente.}}$

Partie III

6.

```python
def permut(n):
    A = np.arange(1,n+1)
    p = n-1
    for k in range(1,n+1):
        j = rd.randint(0,p)
        aux = A[j]
        A[j] = A[p]
        A[p] = aux
        p = p-1
    return A
```

7. (a) La boucle **for** programmée a pour effet d'attribuer à `m` la plus grande valeur apparaissant dans `A`. Comme A contient les entiers 1 à n, `m` vaut bien n.
   (b) `c` est la « position » du maximum, indice de `A` en lequel figure la valeur n.
8. Lorsque n vaut 1, la boucle `for` n'est pas exécutée, et il n'y a qu'une seule affectation concernant c, donc X_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1.
9. (a) Le minimum du nombre d'affectations de c a lieu ssi le maximum n figure en première place, cas où il y a l'affectation `c=0` et c'est tout (les tests de la boucle **for** sont tous `False`). La valeur minimale prise par X_n est 1.
   Le maximum du nombre d'affectations de c a lieu ssi le tableau est $\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & n\end{bmatrix}$, cas où il y a l'affectation `c=0` et une affectation par passage dans la boucle (les tests de la boucle **for** sont tous `True`). La valeur maximale prise par X_n est n.
   Les situations intermédiaires sont toutes possibles ; par exemple, pour un tableau $\begin{bmatrix}n-1 & 1 & 2 & \dots & n\end{bmatrix}$, X_n vaut 2 (il y a l'affectation initiale $c = n-1$ et l'affectation lors du dernier passage en boucle **for**).
   $\boxed{X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]}$
   (b)
   - $[X_n = n]$ est réalisé ssi le tableau est $\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & n\end{bmatrix}$, c'est-à-dire pour l'unique permutation $(1, 2, \dots, n)$ de A, sur l'ensemble des $n!$ permutations équiprobables. Donc $P(X_n = n) = \frac{1}{n!}$.
   - $[X_n = 1]$ est réalisé ssi le tableau débute par n (soit $A_1 = n$ si on utilise les notations de l'énoncé). Il y a $(n-1)!$ permutations de $[\![1, n]\!]$ débutant par n. Donc $P(X_n = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

   - **Loi de X_2.**
     $X_2(\Omega) = [\![1, 2]\!]$ et $P(X_2 = 1) = \frac{1}{2} = P(X_2 = 2)$. X_2 suit la loi uniforme sur $[\![1, 2]\!]$.
   - **Loi de X_3.**
     On a $X_3(\Omega) = [\![1, 2, 3]\!]$ et $P(X_3 = 1) = \frac{1}{3}$ et $P(X_3 = 3) = \frac{1}{6}$.
     Ainsi $P(X_3 = 2) = 1 - P(X_3 = 1) - P(X_3 = 3) = \frac{1}{2}$, et on peut récapituler :

k	1	2	3
$P(X_3 = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

   (c) Soit $n \geqslant 2$ et $j \in [\![2, n]\!]$.
   Les événements $(A_n = n)$ et $(A_n < n)$ forment un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= P([X_n = j] \cap [A_n = n]) + P([X_n = j] \cap [A_n < n]) \\ &= P(A_n = n) P_{[A_n = n]}(X_n = j) + P(A_n < n) P_{[A_n < n]}(X_n = j) \end{aligned}$$

   Réfléchissons à $P_{[A_n = n]}([X_n = j])$. Lorsque $[A_n = n]$ est réalisé, comme `m` vaudra n et sera obtenu pour le dernier passage dans la boucle `for`, il y aura une affectation pour c en dernier passage de la boucle `for`. X_n prend dans ce cas la valeur j ssi il y a eu $j-1$ affectations lors des $n-1$ premiers passages en boucle `for`, qui concernent en fait les permutations de $[\![1, n-1]\!]$. On comprend ainsi que :

$$P_{[A_n = n]}(X_n = j) = P(X_{n-1} = j - 1)$$

   Enfin, il y a $(n-1)!$ permutations sur les $n!$ permutations équiprobables qui finissent par n, donc $P(A_n = n) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

   Réfléchissons à $P_{[A_n < n]}([X_n = j])$. Lorsque $[A_n < n]$ est réalisé, le maximum `m` (qui vaut n) aura été trouvé avant la place n du tableau, et sera obtenu avant le dernier passage dans la boucle `for`, il n'y aura donc aucune affectation pour c en dernier passage de la boucle `for`. X_n prend dans ce cas la valeur j ssi il y a eu j affectations lors des $n-1$ premiers passages en boucle `for`, qui concernent en fait les permutations de $n-1$ valeurs. On comprend ainsi que :

$$P_{[A_n < n]}(X_n = j) = P(X_{n-1} = j)$$

   Enfin, $P(A_n < n) = 1 - P(A_n = n) = 1 - \frac{1}{n}$. On a finalement :

$$\forall n \geqslant 2, \forall j \in [\![2, n]\!], \quad P(X_n = j) = \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j - 1) + \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j)$$

(d) On a vu que $X_4(\Omega)=\{1,2,3,4\}$ et $P(X_4=1)=\frac{1}{4}$ et $P(X_4=4)=\frac{1}{24}$. Par c. :

$$\begin{aligned}P(X_4=2) &= \frac{1}{4}P(X_3=1)+\frac{3}{4}P(X_3=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{24}\\ P(X_4=3) &= \frac{1}{4}P(X_3=2)+\frac{3}{4}P(X_3=3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

et on peut récapituler :

k	1	2	3	4
$P(X_4=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

10. (a) Pour $j=1$, $P(X_{n-1}=j-1)=0$ car 0 n'est pas une valeur prise par X_{n-1}.
D'une part, $P(X_n=1)=\frac{1}{n}$ par 9.b. ; d'autre part, toujours par 9.b., $\frac{(n-1)}{n}P(X_{n-1}=1)=\frac{(n-1)}{n}\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$, donc la relation de 9.c. est valable.

$\boxed{\text{9.c. reste valable pour } j=1.}$

(b) Ainsi pour t réel et $j\in[\![1,n]\!]$,

$$P(X_n=j)t^j=\frac{1}{n}P(X_{n-1}=j-1)t^j+\frac{n-1}{n}P(X_{n-1}=j)t^j$$

Sommons pour j allant de 1 à n, nous obtenons :

$$\begin{aligned}G_n(t) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}P(X_{n-1}=j-1)t^j+\frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n}P(X_{n-1}=j)t^j\\ &= \frac{1}{n}\left(0+\sum_{j=2}^{n}P(X_{n-1}=j-1)t^j\right)+\frac{n-1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n-1}P(X_{n-1}=j)t^j+0\right)\\ &\quad \text{car } P(X_{n-1}=0)=0 \text{ et } P(X_{n-1}=n)=0\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}P(X_{n-1}=k)t^{k+1}+\frac{n-1}{n}G_{n-1}(t)\\ &= \frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n-1}P(X_{n-1}=k)t^k+\frac{n-1}{n}G_{n-1}(t)\\ &= \frac{t}{n}G_{n-1}(t)+\frac{n-1}{n}G_{n-1}(t)\end{aligned}$$

$\boxed{\forall n\geqslant 2,\ \forall t\in\mathbb{R},\ G_n(t)=\frac{t+n-1}{n}G_{n-1}(t)}$

(c) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $\forall t\in\mathbb{R},\ G_n(t)=\frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(t+j)$ » qu'on montre par récurrence pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Pour t réel, $G_1(t)=P(X_1=1)t=t$ par 8. Et $\frac{1}{1!}\prod_{j=0}^{0}(t+j)=t$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Soit $t\in\mathbb{R}$. Par la question précédente, appliquée avec $n+1$ qui est bien supérieur ou égal à 2 :

$$\begin{aligned}G_{n+1}(t) &= \frac{t+n}{n+1}G_n(t)\\ &= \frac{t+n}{n+1}\frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(t+j) \text{ d'après } \mathcal{P}_n\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(t+j)\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\mathbb{R},\ G_n(t)=\frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(t+j)}$

11. La dérivation de $(\star)$ donne :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n'(t) = \frac{1}{n}G_{n-1}(t) + \frac{t+n-1}{n}G_{n-1}'(t)$$

On évalue en $t=1$. En utilisant les questions 1. et 2., on obtient :

$$\forall n \geqslant 2, \quad E_n = G_n'(1) = \frac{1}{n}G_{n-1}(1) + G_{n-1}'(1) = \frac{1}{n} + E_{n-1}$$

Ainsi, $E_n - E_{n-1} = \frac{1}{n}$. Sommons pour n allant de 2 à $p \geqslant 2$; par télescopage :

$$E_p - E_1 = \sum_{n=2}^{p}(E_n - E_{n-1}) = \sum_{n=2}^{p}\frac{1}{n} = u_p - 1$$

De plus, par 8., $E_1 = E(X_1) = 1$, donc pour tout $p \geqslant 2$, $E_p = u_p$. On vient de voir que cette égalité est vraie pour $p=1$: $E_1 = 1 = u_1$.
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ E_n = u_n}$.

12. (a) On dérive la relation obtenue en 11.

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n''(t) = \frac{1}{n}G_{n-1}'(t) + \frac{1}{n}G_{n-1}'(t) + \frac{t+n-1}{n}G_{n-1}''(t)$$

Avec 2., en évaluant en $t=1$:

$$G_n''(1) = \frac{2}{n}E_{n-1} + G_{n-1}''(1)$$

et par 3. :

$$\begin{array}{rcl} V_n &=& G_n''(1) + E_n - E_n^2 \\ &=& \frac{2}{n}E_{n-1} + (V_{n-1} - E_{n-1} + E_{n-1}^2) + E_n - E_n^2 \\ V_n - V_{n-1} &=& \frac{2}{n}E_{n-1} + (E_n - E_{n-1}) + (E_{n-1}^2 - E_n^2) \\ &=& \frac{2}{n}E_{n-1} + \frac{1}{n} + (E_{n-1} - E_n)(E_{n_1} + E_n) \\ &=& \frac{2}{n}E_{n-1} + \frac{1}{n} + (-\frac{1}{n})(2E_{n-1} + \frac{1}{n}) \\ &=& \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \end{array}$$

$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$

(b) $\forall k \geqslant 2$, $V_k - V_{k-1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$. Sommons ces égalités pour k allant de 2 à $n \geqslant 2$. Par télescopage :

$$V_n - V_1 = \sum_{k=2}^{n}(V_k - V_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}) = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}) - 0$$

Donc $V_n - V_1 = u_n - h_n$. De plus, $u_1 - h_1 = 0$, donc cette égalité est encore vraie pour $n=1$. Enfin, par 8., $V_1 = V(X_1) = 0$, donc $V_n = u_n - h_n$.
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n = u_n - h_n}$

(c) Pour $n \geqslant 2$, $\frac{V_n}{\ln n} = \frac{u_n}{\ln n} - \frac{h_n}{\ln n}$.
Comme (h_n) admet une limite finie (question 5.), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{h_n}{\ln n} = 0$.
Et par 4.c., $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{V_n}{\ln n} = 1$.
$\boxed{\text{On a } V_n \sim \ln n.}$