CORRECTION DS5 - EM LYON 2019

Partie I - Étude d'endomorphismes de polynômes.

1. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, $\Psi_a(P) = 2P + (X-a)P'$ est une somme de polynômes donc c'est un polynôme, de plus $\deg(P) \leqslant n$ donc $\deg(P') \leqslant n-1$ donc $\deg((X-a)P') \leqslant n-1+1 = n$ en sommant on a $\deg(P + (X-a)P') \leqslant n$ donc $\Psi_a(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Soit $A(X) \in \mathbb{R}_n[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
   $$\Psi_a(\alpha A + P) = 2(\alpha A + P) + (X-a)(\alpha A + P)' = 2\alpha A(X) + 2P + (X-a)(\alpha A' + P')$$
   par linéarité de la dérivation.
   Donc $\Psi_a(\alpha A + P) = \alpha(2A(X) + (X-a)A') + 2P + (X-a)P' = \alpha \Psi_a(A) + \Psi_a(P)$. Donc Ψ_a est linéaire.
   Bilan : $\boxed{\Psi_a : P \mapsto \Psi_a(P) \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$
2. On calcule $\Psi_a(1) = 2 \times 1 + 0 = 2$, et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,
   $$\Psi_a(X^k) = 2X^k + (X-a)kX^{k-1} = (2+k)X^k - akX^{k-1}.$$
   Donc
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Psi_a) = \begin{pmatrix} 2 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & -2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & -na \\ 0 & \dots & & 0 & n+2 \end{pmatrix}.$$
3. (a) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Psi_a)$ est triangulaire donc les valeurs de sa diagonale sont ses valeurs propres c'est-à-dire : $2, 3, 4, ..., n+2$. Il s'agit d'entiers consécutifs donc il y en a $n+2-2+1 = n+1$ or $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Psi_a) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Psi_a)$ est diagonalisable et son spectre est $[\![2, n+2]\!]$.
   Bilan : $\boxed{\Psi_a \text{ est diagonalisable et son spectre est } [\![2, n+2]\!].}$
   (b) Ψ_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et 0 n'est pas dans le spectre de Ψ_a donc ce dernier est bijectif.
   Bilan : $\boxed{\Psi_a \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$
   (c) On a $\Psi_a(Q_0) = 2 = 2Q_0$. Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $\Psi_a(Q_k) = 2Q_k(X) + (X-a)\big(k(X-a)^{k-1}\big) = (2+k)Q_k$.
   Bilan : $\boxed{\text{Pour tout } k \text{ de } [\![0, n]\!], \Psi_a(Q_k) = (2+k)Q_k.}$
   (d) Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, on voit que Q_k n'est pas le polynôme nul donc Q_k est vecteur propre de Ψ_a associé à la valeur propre $2+k$.
   Or le cardinal du spectre de Ψ_a est égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ donc les sous-espaces propres (SEP) de Ψ_a sont tous de dimension 1 donc Q_k à lui seul forme une base de $\mathrm{SEP}(\Psi_a, 2+k)$.
4. (a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on a
   $$\big((X-a)^2 P(X)\big)' = 2(X-a)P + (X-a)^2 P' = (X-a)\big(2P + (X-a)^2 P'\big) = (X-a)\Psi_a(P).$$
   (b) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ et pour tout réel $x \neq a$,
   $$\Phi_a\big(\Psi_a(P)\big)(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a)\Psi_a(P)(t)\mathrm{d}t.$$
   L'intégrale existe car on intègre une fonction continue sur un segment.
   Or $t \mapsto (t-a)\Psi_a(P)(t)$ a pour primitive $t \mapsto (t-a)^2 P(t)$ d'après ce qui précède donc
   $$\Phi_a\big(\Psi_a(P)\big)(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \left[(t-a)^2 P(t)\right]_a^x = \frac{1}{(x-a)^2}(x-a)^2 P(x) = P(x).$$
   Il reste le cas $x = a$, pour cela on voit que $\Phi_a\big(\Psi_a(P)\big)(a) = \frac{\Psi_a(P)(a)}{2} = \frac{2P(a) + (a-a)P'(a)}{2} = P(a)$.
   On a montré que les fonctions $\Phi_a\big(\Psi_a(P)\big)$ et $x \mapsto P(x)$ coïncident sur $\mathbb{R}$ donc elles sont égales, en particulier $\Phi_a\big(\Psi_a(P)\big)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Bilan : $\boxed{\text{Pour tout polynôme } P \text{ de } \mathbb{R}_n[X] : \quad \Phi_a\big(\Psi_a(P)\big) = P.}$

(c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X], \Phi_a(P)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ car les polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ donc on peut intégrer $t \mapsto (t-a)P(t)$ sur le segment $[a,x]$ pour tout réel $x \neq a$.
De plus Ψ_a est bijective donc elle admet une fonction réciproque sur $\mathbb{R}_n[X]$. Avec la question précédente, on peut écrire

$$\Phi_a(P) = \Phi_a\left(\Psi_a\left(\Psi_a^{-1}(P)\right)\right) = \Psi_a^{-1}(P).$$

Cela prouve que Φ_a et Ψ_a^{-1} coïncident sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc elles sont égales, en particulier cela prouve que Φ_a est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

Bilan : $\boxed{\Phi_a : P \mapsto \Phi_a(P) \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X] \text{ et } \Phi_a = \Psi_a^{-1} \text{ donc } \Phi_a^{-1} = \Psi_a.}$

(d) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\Psi_a(Q_k) = (2+k)Q_k$, on peut diviser par $2+k \neq 0$ et $Q_k = \frac{1}{2+k}\Psi_a(Q_k)$ donc $Q_k = \Phi\left(\Psi_a(Q_k)\right) = \frac{1}{2+k}\Psi_a(Q_k)$.
Or Q_k est non nul et Ψ_a est bijective donc $\Psi_a(Q_k)$ est non nul donc $\Psi_a(Q_k)$ est vecteur propre de Φ_a associé à $\frac{1}{2+k}$.
La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{2+x}$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ donc elle est injective donc $\{g(0), g(1), ..., g(n)\}$ $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2+n}\right\}$ est de cardinal $n+1$ comme $[\![0,n]\!]$ donc Φ_a possède $n+1$ valeurs propres sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc elle est diagonalisable.

Bilan : $\boxed{\Phi_a \text{ est diagonalisable et son spectre est } \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2+n}\right\}.}$

Partie II - Étude d'une fonction définie par une intégrale.

5. On pose, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\quad h(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$

(a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc par produit avec la fonction polynomiale $t \mapsto t$, la fonction $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une primitive, notée F, sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(0).$$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $t \mapsto tf(t)$. Celle-ci est continue sur $\mathbb{R}$, donc F est C^1 sur $\mathbb{R}$.
Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$, $h'(x) = F'(x) = xf(x)$.

Bilan : $\boxed{\text{La fonction } h \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et, pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}, h'(x) = xf(x).}$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Sur le segment $[0,x]$, f est continue donc elle admet un minimum atteint en un point noté $\alpha_x \in [0,x]$ et un maximum atteint en un point noté $\beta_x \in [0,x]$.
Ainsi, pour tout $t \in [0,x]$, on a $f(\alpha_x) \leqslant f(t) \leqslant f(\beta_x)$, on multiplie par $t \geqslant 0$, on a

$$tf(\alpha_x) \leqslant tf(t) \leqslant tf(\beta_x).$$

On intègre sur $[0,x]$ selon t avec $0 < x$, les fonctions en jeu sont bien continues ainsi

$$\underbrace{f(\alpha_x)}_{\text{indépendant de } t} \int_0^x t\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{f(\beta_x)}_{\text{indépendant de } t} \int_0^x t\ \mathrm{d}t.$$

(c) On reprend ce qui précède et on calcule $\displaystyle\int_0^x t\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$.
Donc

$$\frac{x^2}{2}f(\alpha_x) \leqslant \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = h(x) \leqslant \frac{x^2}{2}f(\beta_x).$$

Donc en divisant par $x^2 > 0$,

$$\frac{1}{2}f(\alpha_x) \leqslant \frac{h(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{2}f(\beta_x).$$

On a $0 \leqslant \alpha_x \leqslant x$ donc par encadrement $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\alpha_x) = 0$, par continuité de f en 0 on a $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(\alpha_x) = f(0)$.
De façon analogue $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(\beta_x) = f(0)$.

Le théorème des gendarmes permet de conclure.

Bilan : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}.}$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}^{-*}$. Sur le segment $[x;0]$, f est continue donc elle admet un minimum atteint en un point noté $\alpha_x \in [x;0]$ et un maximum atteint en un point noté $\beta_x \in [x;0]$.
Ainsi, pour tout $t \in [x;0]$, on a $f(\alpha_x) \leqslant f(t) \leqslant f(\beta_x)$, on multiplie par $t \leqslant 0$, on a

$$tf(\beta_x) \leqslant tf(t) \leqslant tf(\alpha_x).$$

On intègre sur $[x,0]$ selon t avec $x<0$, les fonctions en jeu sont bien continues ainsi

$$\underbrace{f(\beta_x)}_{\text{indépendant de } t} \int_x^0 t\ \mathrm{d}t \leqslant \int_x^0 tf(t)\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{f(\alpha_x)}_{\text{indépendant de } t} \int_x^0 t\ \mathrm{d}t.$$

On inverse les bornes des intégrales en multipliant par -1,

$$f(\alpha_x)\int_0^x t\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t \leqslant f(\beta_x)\int_0^x t\ \mathrm{d}t.$$

On reprend ce qui précède et on calcule $\displaystyle\int_0^x t\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$.
Donc

$$\frac{x^2}{2} f(\alpha_x) \leqslant \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = h(x) \leqslant \frac{x^2}{2} f(\beta_x).$$

Donc en divisant par $x^2>0$,

$$\frac{1}{2} f(\alpha_x) \leqslant \frac{h(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{2} f(\beta_x).$$

On a $x \leqslant \alpha_x \leqslant 0$ donc par encadrement $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (\alpha_x) = 0$, par continuité de f en 0 on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(\alpha_x) = f(0)$.
De façon analogue $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(\beta_x) = f(0)$.
Le théorème des gendarmes permet de conclure.

Bilan : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}.}$

6. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = \dfrac{h(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Donc pour $x \neq 0, \Phi(f)(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{h(x)}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \Phi(f)(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \Phi(f)(x) = \frac{f(0)}{2} = \Phi(f)(0)$. Donc Φ est continue en 0.
Sur $\mathbb{R}^*$, $\Phi(f)(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ or h est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc par produit $\Phi(f)$ est C^1 donc continue sur $\mathbb{R}^*$.
De plus pour $x \neq 0$,

$$\Phi(f)'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{h(x)}{x^2}\right) = \frac{h'(x)x^2 - 2xh(x)}{x^4} = \frac{xf(x)x^2 - 2xh(x)}{x^4} = \frac{f(x)x^2 - 2h(x)}{x^3} = \frac{1}{x}\left(f(x) - 2\frac{h(x)}{x^2}\right).$$

Bilan : $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \big(\Phi(f)\big)'(x) = \frac{1}{x}\big(f(x) - 2\Phi(f)(x)\big).$$

7. (a) Soit f une fonction paire, $\Phi(f)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$.
Et, pour $x \neq 0$,
$$\Phi(f)(-x) = \frac{1}{(-x)^2} \int_0^{-x} tf(t)\mathrm{d}t.$$
On fait le changement de variable affine donc C^1 suivant $u = -t, du = -dt, t = 0$ et $u = 0$ et $t = -x, u = x$. Ainsi
$$\Phi(f)(-x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x (-u)f(-u)(-\mathrm{d}u) = \frac{1}{x^2} \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u \text{ car } f \text{ est paire.}$$
Donc $\Phi(f)(-x) = \Phi(f)(x)$.
De plus $\Phi(f)(-0) = \Phi(f)(0)$. Donc $\Phi(f)$ est paire sur $\mathbb{R}$.
Soit g une fonction impaire, $\Phi(g)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$.
Et, pour $x \neq 0$,
$$\Phi(g)(-x) = \frac{1}{(-x)^2} \int_0^{-x} tg(t)\mathrm{d}t.$$
On fait le changement de variable affine donc C^1 suivant $u = -t, du = -dt, t = 0$ et $u = 0$ et $t = -x, u = x$. Ainsi
$$\Phi(f)(-x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x (-u)g(-u)(-\mathrm{d}u) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x ug(u)\mathrm{d}u \text{ car } g \text{ est impaire.}$$
Donc $\Phi(g)(-x) = \Phi(g)(x)$.
De plus $\Phi(g)(-0) = \frac{g(0)}{2} = 0 = -\Phi(g)(0)$ car g est impaire donc $g(0) = 0$.
Donc $\Phi(g)$ est impaire sur $\mathbb{R}$.
Bilan : si f est une fonction paire (respectivement impaire), alors $\Phi(f)$ est encore une fonction paire (respectivement impaire).

(b) Soit f une fonction positive sur $\mathbb{R}$, Pour $x > 0$,
$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$$
Pour tout $t \in [0, x]$, on a $0 \leqslant t \leqslant x$, on multiplie par $f(t) \geqslant 0$ et on intègre sur $[0, x]$ selon t avec $0 < x$, ainsi $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$. Comme $\frac{1}{x^2} > 0$, on a bien $\Phi(f)(x) \geqslant 0$.
Pour $x < 0$,
$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$$
Pour tout $t \in [x, 0]$, on a $x \leqslant t \leqslant 0$, on multiplie par $f(t) \geqslant 0$ et on intègre sur $[x, 0]$ selon t avec $x < 0$, ainsi $0 \geqslant \displaystyle\int_x^0 tf(t)\mathrm{d}t$. On inverse l'ordre des bornes de l'intégrale, ce qui change le signe et comme $\frac{1}{x^2} > 0$, on a bien $\Phi(f)(x) \geqslant 0$.
Enfin $\Phi(f)(0) = \frac{f(0)}{2} \geqslant 0$.
Bilan : si f est une fonction positive, alors $\Phi(f)$ est encore une fonction positive.

8. On **admet** le résultat suivant :
$$\text{si } \lim_{+\infty} f = 0, \quad \text{alors } \lim_{+\infty} \big(\Phi(f)\big) = 0.$$

(a) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$. On pose $g : x \mapsto f(x) - \ell$, donc $\lim\limits_{+\infty} g = 0$. En appliquant le résultat admis, $\lim\limits_{+\infty} \big(\Phi(g)\big) = 0$.
Or pour $x > 0$, $\Phi(g)(x) = \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x t(f(t) - \ell)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t - \ell \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x t\mathrm{d}t = \Phi(f)(x) - \dfrac{\ell}{2}$.
Or $\lim\limits_{+\infty} \big(\Phi(g)\big) = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} \big(\Phi(f)(x) - \frac{\ell}{2}\big) = 0$.
Bilan : $\boxed{\text{si } \lim\limits_{+\infty} f = \ell, \quad \text{alors } \lim\limits_{+\infty} \big(\Phi(f)\big) = \dfrac{\ell}{2}.}$

(b) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$. On pose $h : x \mapsto f(-x)$, donc $\lim\limits_{+\infty} h = \ell$. En appliquant le résultat précédent, $\lim\limits_{+\infty} \big(\Phi(h)\big) = \frac{\ell}{2}$.

Or pour $x < 0$, $\Phi(f)(x) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$.

On refait le changement de variable $u = -t$,

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{-x}(-u)f(-u)(-\mathrm{d}u) = \frac{1}{(-x)^2}\int_0^{-x} uh(u)\mathrm{d}u = \Phi(h)(-x).$$

Or $-x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\Phi(h)(-x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{2}$ donc $\Phi(f)(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{2}$.

Bilan : $\boxed{\text{si } \lim\limits_{-\infty} f = \ell, \quad \text{alors } \lim\limits_{-\infty}\big(\Phi(f)\big) = \dfrac{\ell}{2}.}$

Partie III - Une application en probabilité.

9. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on sait que F est une fonction de répartition de loi à densité donc elle est continue, croissante et positive sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout $t \in [0;x]$, on a $0 \leqslant F(t) \leqslant F(x)$, on multiplie par $t \geqslant 0$, et $0 \leqslant tF(t) \leqslant tF(x)$.
On intègre sur $[0;x]$ selon t avec $0 < x$, les fonctions en jeu sont bien continues ainsi

$$0 \leqslant \int_0^x tF(t)\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{F(x)}_{\text{indépendant de } t}\int_0^x t\mathrm{d}t = F(x)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2F(x)}{2}.$$

On multiplie par $\frac{2}{x^2} > 0$, et on a bien $0 \leqslant G(x) \leqslant F(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^{-*}$, on sait déjà que F est continue, croissante sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout $t \in [x;0]$, on a $F(x) \leqslant F(t)$, on multiplie par $t \leqslant 0$, et $tF(t) \leqslant tF(x)$.
On intègre sur $[x;0]$ selon t avec $x < 0$, ainsi

$$\int_x^0 tF(t)\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{F(x)}_{\text{indépendant de } t}\int_x^0 t\mathrm{d}t = -\frac{x^2F(x)}{2}.$$

On multiplie par $-\frac{2}{x^2} < 0$, le signe $-$ est utilisé pour inverser les bornes de l'intégrale $\displaystyle\int_x^0 tF(t)\mathrm{d}t$ et on a bien $0 \leqslant F(x) \leqslant G(x)$.
Bilan : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leqslant G(x) \leqslant F(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{-*},\ 0 \leqslant F(x) \leqslant G(x).}$

10. On sait que $t \mapsto t$ et F sont continues sur $\mathbb{R}$ donc par produit $t \mapsto tF(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une primitive que l'on note H qui est donc C^1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $G(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x tF(t)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{x^2}\left(H(x) - H(0)\right)$.
Les fonctions $t \mapsto \frac{2}{t^2}$ et H sont C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc G l'est aussi et

$$G'(x) = \frac{-4}{x^3}\left(H(x) - H(0)\right) + \frac{2}{x^2}H'(x) = \frac{-2}{x}G(x) + \frac{2}{x^2}xF(x) = \frac{2}{x}\left(-G(x) + F(x)\right).$$

Bilan : G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}^*, G'(x) = \frac{2}{x}\left(-G(x) + F(x)\right)$.

11. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} G'(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- g est bien définie sur $\mathbb{R}$, elle est aussi continue sur $\mathbb{R}^*$ car G est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc G' est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- Montrons que g est positive sur $\mathbb{R}$.
Soit $x > 0$, on a vu à la question 9 que $0 \leqslant G(x) \leqslant F(x)$ donc $0 \leqslant F(x) - G(x)$, on multiplie par $\frac{2}{x} > 0$ et $0 \leqslant \frac{2}{x}(F(x) - G(x)) = g(x)$.
Soit $x < 0$, on a vu à la question 9 que $0 \leqslant F(x) \leqslant G(x)$ donc $0 \geqslant F(x) - G(x)$, on multiplie par $\frac{2}{x} < 0$ et $0 \leqslant \frac{2}{x}(F(x) - G(x)) = g(x)$.
Enfin $g(0) = 0$ donc g est bien positive sur $\mathbb{R}$.

- Il reste à établir que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

  Prenons $0 < a < A$, la fonction g est continue sur le segment $[a, A]$ et $\displaystyle\int_a^A g(t)\mathrm{d}t = \int_a^A G'(t)\mathrm{d}t = G(A) - G(a)$. Or selon la question 6, la fonction $G = 2\Phi(F)$ (avec F continue sur $\mathbb{R}$) est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0 donc $\displaystyle\int_0^A g(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $G(A) - G(0)$.

  Comme F est une fonction de répartition, on sait que $\lim\limits_{+\infty} F = 1$, ainsi d'après la question 8a,

  $$\lim_{+\infty} G = \lim_{+\infty}(2\Phi(F)) = 2\lim_{+\infty}(\Phi(F)) = 2\frac{\lim\limits_{+\infty} F}{2} = 1.$$

  donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $1 - G(0)$.

  Prenons $B < b < 0$, la fonction g est continue sur le segment $[B, b]$ et $\displaystyle\int_B^b g(t)\mathrm{d}t = \int_B^b G'(t)\mathrm{d}t = G(b) - G(B)$. Or selon la question 6, la fonction $G = 2\Phi(F)$ (avec F continue sur $\mathbb{R}$) est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0 donc $\displaystyle\int_B^0 g(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $G(0) - G(B)$.

  Comme F est une fonction de répartition, on sait que $\lim\limits_{-\infty} F = 0$, ainsi d'après la question 8b,

  $$\lim_{-\infty} G = \lim_{-\infty}(2\Phi(F)) = 2\lim_{-\infty}(\Phi(F)) = 2\frac{\lim\limits_{-\infty} F}{2} = 0.$$

  donc $\displaystyle\int_{-\infty}^0 g(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $0 - G(0)$.

  Par relation de Chasles des intégrales convergentes, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut

  $$\int_{-\infty}^0 g(t)\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = 1 - G(0) - (0 - G(0)) = 1.$$

Donc g est bien une densité de probabiité.
Dans le raisonnement qui précède il est vu que G est C^1 sur $\mathbb{R}^*$, que G est continue sur $\mathbb{R}$. De plus G' est positive sur $\mathbb{R}^-$ donc G est croissante sur $\mathbb{R}^-$, de même G est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc, par continuité en 0, G est croissante sur $\mathbb{R}$. Il a été vu aussi que $\lim\limits_{-\infty} G = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} G = 1$.
Donc G peut être considérée comme une fonction de répartition d'une variable aléatoire V.
On remarque que G' et g coïncide sur $\mathbb{R}^*$ donc g est une densité de probabilité de V.
Bilan : g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire V et G est la fonction de répartition de V.

12. On définit la fonction h_1 sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

    (a)
    - h_1 est bien définie et positive sur $\mathbb{R}$.
    - Elle est aussi continue sur $\mathbb{R}^{-*}$ car elle y est constante. Sur $\mathbb{R}^{*+}, h_1$ est le produit d'un polynôme et d'un exponentielle de polynôme donc h_1 est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$. Donc h_1 est continue sur $\mathbb{R}^*$.
    - Il reste à établir que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Remarquons que h_1 est nulle sur $\mathbb{R}^-$, donc il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_1(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. On remarque immédiatement que $\lim\limits_{0^+} h_1 = 0 = h_1(0)$ donc h_1 est continue à droite de 0. Comme h_1 est continue sur $\mathbb{R}^+$, on peut l'intégrer sur tout segment de $\mathbb{R}^+$. Soit $A > 0$,

      $$\int_0^A h_1(t)\mathrm{d}t = \int_0^A 2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^A = -\mathrm{e}^{-A^2} + \mathrm{e}^{-0^2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Bilan : $\boxed{h_1 \text{ est une densité de probabilité.}}$

Soit X_1 une variable aléatoire admettant h_1 pour densité.

(b) X_1 est à densité donc X_1 admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} th_1(t)\mathrm{d}t$ converge absolument.
Comme h_1 est nulle sur $\mathbb{R}^-$, cela revient à montrer que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} th_1(t)\mathrm{d}t$ converge absolument. Cela équivaut encore à $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} 2t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge absolument. La fonction sous cette intégrale est positive donc convergence absolue équivaut à convergence.
On pense à exploiter le moment d'ordre 2 d'une loi normale centrée réduite d'une variable X qui vaut $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1$ autrement dit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^2\mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u = 1.$$

La fonction $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}u^2\mathrm{e}^{-u^2/2}$ est paire sur $\mathbb{R}$ donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^2\mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^2\mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u = 1.$$

Cela suggère le changement de variable affine $t = \frac{u}{\sqrt{2}}$, il est C^1, strictement croissant sur $\mathbb{R}^+$ donc il ne change ni la nature, ni la valeur de $2\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^2\mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u$.
Les bornes sont inchangées et $\mathrm{d}u = \sqrt{2}\mathrm{d}t$ donc

$$1 = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^2\mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2}t\right)^2 \mathrm{e}^{-t^2}\sqrt{2}\mathrm{d}t = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Donc

$$\int_{0}^{+\infty} 2t^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Bilan : $\boxed{X_1 \text{ admet une espérance et } \mathbf{E}(X_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

(c) On note H_1 la fonction de répartition de X_1 et on pose $H_2 = 2\Phi(H_1)$.

D'après ce qui précède, H_1 est nulle sur $\mathbb{R}^-$ comme h_1. Soit $x > 0$,

$$H_1(x) = \int_{-\infty}^{x} h_1(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} 2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Ensuite $H_2 = 2\Phi(H_1)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_2(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x tH_1(t)\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0, \\ F(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Donc pour $x < 0$, on a $[x;0] \subset \mathbb{R}^-$ donc $\dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x tH_1(t)\mathrm{d}t = 0$ donc $H_2(x) = 0$.
Puis $H_2(0) = H_1(0) = 0$.
Enfin pour $x > 0$, on a $[0;x] \subset \mathbb{R}^+$ donc

$$H_2(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x tH_1(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2}\int_0^x \left(t - t\mathrm{e}^{-t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2}\left[\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x = \frac{2}{x^2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} - \frac{1}{2}\right).$$

Bilan : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad H_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 1 - \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}{x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

D'après la fonction 11., H_2 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité que l'on note X_2.

Pour déterminer une densité h_2 de X_2, il suffit de dériver H_2 là où elle est C^1 et d'imposer des valeurs là où elle n'est a priori pas C^1.
Ici H_2 est C^1 sur $\mathbb{R}^*$, on propose

$$h_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ \dfrac{-2x^3\mathrm{e}^{-x^2} - 2x(\mathrm{e}^{-x^2} - 1)}{x^4} = \dfrac{-2x^2\mathrm{e}^{-x^2} - 2\mathrm{e}^{-x^2} + 2}{x^3} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que X_2 admet une espérance revient à montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} th_2(t)\mathrm{d}t$ converge absolument. Comme h_2 est nulle sur $\mathbb{R}^-$, cela revient à montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} th_2(t)\mathrm{d}t$ converge absolument. La fonction sous cette intégrale est positive donc convergence absolue équivaut à convergence.
On remarque que, pour $t > 0$, on a $th_2(t) = \frac{-2t^2\mathrm{e}^{-t^2}+2\left(1-\mathrm{e}^{-t^2}\right)}{t^2} = -2\mathrm{e}^{-t^2} + \frac{2\left(1-\mathrm{e}^{-t^2}\right)}{t^2}$.
Avec le changement de variables $u = \sqrt{2}t$, on montre comme ci-dessus que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge en faisant apparaître une densité de loi normale centrée réduite. Il reste à montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.
La fonction $t \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}$ est continue, positive sur $]0, +\infty[$, avec $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$ on a $\frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2} \underset{0}{\sim} -1$ car $-t^2 \underset{0}{\to} 0$.
Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0.
On a aussi $1 - \mathrm{e}^{-t^2} \underset{+\infty}{\to} 1$ donc comme $1 \neq 0$ on a $1 - \mathrm{e}^{-t^2} \underset{+\infty}{\sim} 1$ donc $\frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$.
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge donc, par comparaison d'intégrale de fonctions psoitives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\text{Par somme } \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\mathrm{d}t \text{ converge et } X_2 \text{ a une espérance.}}$$

Partie IV - Étude d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire.

13. (a) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $0 \leqslant (x + y)^2$ donc $0 \leqslant x^2 + 2xy + y^2$ donc $-xy \leqslant \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.
De même $(x - y)^2 \geqslant 0$ donc $0 \leqslant x^2 - 2xy + y^2$ donc $xy \leqslant \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.
Donc $\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ domine xy et $-xy$ donc il domine $|xy|$.
Bilan : $\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| \leqslant \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right).}$

(b) Soit f et g dans E_2, on a, pour tout $x \geqslant 0, |f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left(f(x)^2 + g(x)^2\right)$.
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(g(x)\big)^2\mathrm{d}x$ convergent donc par domination de fonctions positives et continues $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)g(x)|\mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
Bilan : $\boxed{\text{Pour toutes fonctions } f \text{ et } g \text{ de } E_2, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x \text{ est absolument convergente.}}$

14.
- Par définition, E_2 est inclus dans E.
- La fonction nulle de E est bien de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc elle est dans E_2 qui n'est donc pas vide.
- Soit f et g dans E_2 et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a, pour tout $x \geqslant 0, (\alpha f(x) + g(x))^2 = \alpha^2 f(x)^2 + 2\alpha f(x)g(x) + g(x)^2$.
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente donc convergente, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)^2\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)^2\mathrm{d}x$

convergent donc par somme d'intégrales convergentes $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\alpha f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x$ convergent. Donc $\alpha f + g \in E_2$.

Bilan : $\boxed{E_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

On considère l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $E_2\times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (f,g)\in E_2\times E_2,\ \langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

15.
- L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien définie de $E_2\times E_2$ dans $\mathbb{R}$ d'après la question 13.
- L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique par commutativité du produit des réels en effet, pour tout $(f,g)\in E_2\times E_2$ et $x\in\mathbb{R}^+$, on a $f(x)g(x)=g(x)f(x)$.
- Soit f,g et h dans E_2 et $\alpha\in\mathbb{R}$, on a

$$\langle \alpha f+g,h\rangle = \int_0^{+\infty}(\alpha f(x)+g(x))\,h(x)\mathrm{d}x = \alpha\int_0^{+\infty} f(x)h(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} g(x)h(x)\mathrm{d}x = \alpha\langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$$

  par linéarité des intégrales convergentes. Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche et par symétrie, elle l'est à droite itou.
- On a

$$\langle f,f\rangle = \int_0^{+\infty} (f(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

  car on intègre une fonction positive avec des bornes d'intégration dans l'ordre croissant.
- Enfin en notant θ la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$ on a bien sûr $\langle\theta,\theta\rangle=0$.

  Réciproquement si $\langle f,f\rangle = 0$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}(f(x))^2\,\mathrm{d}x = 0$.

  La fonction $t\mapsto (f(x))^2$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc elle y admet une primitive que je note T, on a alors

$$\int_0^{+\infty}(f(x))^2\,\mathrm{d}x = \lim_{+\infty}(T) - T(0) = 0.$$

  Or $T' = f^2$ est positive sur $\mathbb{R}^+$ donc T est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, on a $T(0)\leqslant T(x)\leqslant \lim\limits_{+\infty}(T) = T(0)$ donc T est constante sur $\mathbb{R}^+$ donc sa dérivée est nulle donc f est nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Bilan : $\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire de } E_2.}$

On munit E_2 de ce produit scalaire et de la norme associée $\|\cdot\|$.

16. Soit f une fonction de E_2.

On note, comme dans la partie **B.**, pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $h(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$.

(a) À la question 5c, il est vu que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$. La fonction carrée est continue sur $\mathbb{R}$, donc par composition $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(h(x))^2}{x^4} = \frac{(f(0))^2}{4}$.

À la question 5d, il est vu que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$. La fonction carrée est continue sur $\mathbb{R}$, donc par composition $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{(h(x))^2}{x^4} = \frac{(f(0))^2}{4}$.

(b) On fait une intégration par parties, on pose

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4} \\ v(x) = (h(x))^2 \end{cases} \quad\text{et}\quad \begin{cases} u(x) = \frac{-1}{3}x^{-3} = \frac{-1}{3x^3} \\ v'(x) = 2h'(x)h(x) = 2xf(x)h(x) \text{ avec la question 5a} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, on fixe $a>0$ et on a

$$\forall X>0,\int_a^X \frac{\left(h(x)\right)^2}{x^4}\mathrm{d}x=\left[\frac{-1}{3}x^{-3}\left(h(x)\right)^2\right]_a^X-\int_a^X \frac{-1}{3x^3}2xf(x)h(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-1}{3X^3}\left(h(X)\right)^2-\frac{-1}{3a^3}\left(h(a)\right)^2+\frac{2}{3}\int_a^X f(x)\frac{h(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{-1}{3X^3}\left(h(X)\right)^2-\frac{-1}{3a^3}\left(h(a)\right)^2+\frac{2}{3}\int_a^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x.$$

Il reste à étudier la convergence lorsque $a\to 0^+$. On a $\frac{1}{3a^3}\left(h(a)\right)^2=a\times\frac{1}{3a^4}\left(h(a)\right)^2 \underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} 0\times\frac{(f(0))^2}{12}=0$.

La question 6. assure que $\Phi(f)$ est continue en 0 donc $f\times\Phi(f)$ l'est aussi et $\displaystyle\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x$ converge ou existe.

Bilan :

$$\forall X>0,\int_0^X \frac{\left(h(x)\right)^2}{x^4}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\frac{\left(h(X)\right)^2}{X^3}+\frac{2}{3}\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x.$$

(c) Soit $X>0$. La fonction polynomiale $\lambda\mapsto\displaystyle\int_0^X\left(\lambda f(x)+\Phi(f)(x)\right)^2\mathrm{d}x$ est positive sur $\mathbb{R}$ car une intégrale de fonction positive avec des bornes dans l'ordre croissant est positive. Elle peut s'écrire

$$\lambda\mapsto\lambda^2\int_0^X f^2(x)\mathrm{d}x+2\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x\times\lambda+\int_0^X\Phi(f)(x)^2\mathrm{d}x.$$

Si $\displaystyle\int_0^X f^2(x)\mathrm{d}x=0$ alors on a déjà vu que f est nulle sur $[0,X]$ donc

$$\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x=0=\left(\int_0^X\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^X\left(\Phi(f)(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Si $\displaystyle\int_0^X f^2(x)\mathrm{d}x\neq 0$, alors la fonction polynomiale $\lambda\mapsto\displaystyle\int_0^X\left(\lambda f(x)+\Phi(f)(x)\right)^2\mathrm{d}x$ est de degré 2 et elle est de signe constant sur $\mathbb{R}$ donc elle ne peut pas avoir deux racines réelles distinctes sinon il y a changement de signe. Donc le discriminant est négatif ou nul donc

$$\Delta=\left(2\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x\right)^2-4\left(\int_0^X f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^X\Phi(f)(x)^2(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant 0.$$

Donc en divisant par 4>0,

$$\left(\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_0^X f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^X\Phi(f)(x)^2(x)\mathrm{d}x\right).$$

On compose par racine carrée qui est croissante sur $\mathbb{R}^+$, les deux intégrales $\displaystyle\int_0^X f^2(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^X\Phi(f)(x)^2(x)\mathrm{d}x$ sont positives.

$$\left|\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\int_0^X f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^X\Phi(f)(x)^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Bilan :

$$\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^X\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^X\left(\Phi(f)(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

(d) Soit $X>0$, on multiplie ce qui précède par $\frac{2}{3}$,

$$\frac{2}{3}\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{3}\left(\int_0^X\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^X\left(\Phi(f)(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

On reprend la question 16.b, qui donne

$$\int_0^X \frac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}\mathrm{d}x = \int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\mathrm{d}x = \underbrace{-\frac{1}{3}\frac{\big(h(X)\big)^2}{X^3}}_{\leqslant 0} + \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x.$$

Donc

$$\int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^X \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Si $\left(\int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} = 0$ alors comme $\frac{2}{3}\left(\int_0^X \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$ est positive, on pourra conclure.

Si $\left(\int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} > 0$, alors on pourra diviser ce qui précède par cette quantité et on pourra conclure aussi.

Bilan : $\boxed{\left(\int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^X \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.}$

(e) On compose ce qui précède par la fonction $u \mapsto u^2$ croissante sur $\mathbb{R}^+$ et on a $0 \leqslant \int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{9}\int_0^X \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x$.

Or $f \in E_2$ donc

$$\int_0^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x = \int_0^X \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x + \int_X^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x$$

et f^2 est positive donc avec $X < +\infty$ on a $0 \leqslant \int_X^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x$ donc

$$0 \leqslant \int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{9}\int_0^X \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{9}\int_0^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x.$$

La fonction $t \mapsto \big(\Phi(f)(x)\big)^2$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc la fonction $X \mapsto \int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\mathrm{d}x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ avec une dérivée $t \mapsto \big(\Phi(f)(x)\big)^2$ positive donc $X \mapsto \int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\mathrm{d}x$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a montré qu'elle est majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $\frac{4}{9}\int_0^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x$ (indépendant de X) donc $X \mapsto \int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\mathrm{d}x$ a une limite finie en $+\infty$. Donc $\int_0^{+\infty} \big(\Phi(f)(x)\big)^2\mathrm{d}x$ converge.
En faisant tendre X vers $+\infty$ dans la relation du 16.d, on a

$$\left(\int_0^{+\infty} \big(\Phi(f)(x)\big)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \text{ donc } \sqrt{\langle\Phi(f),\Phi(f)\rangle} \leqslant \frac{2}{3}\sqrt{\langle f,f\rangle}.$$

Bilan : $\boxed{\text{La fonction } \Phi(f) \text{ appartient à } E_2 \text{ et } \|\Phi(f)\| \leqslant \frac{2}{3}\|f\|.}$

(f) Soit $X > 0$, en utilisant la relation de la question **16.b**, on a

$$X\left(\Phi(f)(X)\right)^2 = X\left(\frac{h(X)}{X^2}\right)^2 = \frac{h(X)^2}{X^3} = -3\int_0^X \frac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}\mathrm{d}x + 2\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x$$

or les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}\mathrm{d}x$, , $\int_0^{+\infty} f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x$ convergent donc $X \mapsto X\big(\Phi(f)(X)\big)^2$ a une limite finie en $+\infty$.

Notons α cette limite, elle est positive car $X \mapsto X\Big(\Phi(f)(X)\Big)^2$ positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. Si α est non nulle alors

$$\frac{X\Big(\Phi(f)(X)\Big)^2}{\alpha} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

donc $X\Big(\Phi(f)(X)\Big)^2 \underset{+\infty}{\sim} \alpha$ donc $\Big(\Phi(f)(X)\Big)^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{X}$ donc par comparaison des intégrales de fonctions positives $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \Big(\Phi(f)(x)\Big)^2\mathrm{d}x$ sont de même nature.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x}\mathrm{d}x$ diverge, cela contredit le fait que $\Phi(f) \in E_2$. Donc α est nulle.

Bilan : $\boxed{\text{La limite de } X \mapsto X\big(\Phi(f)(X)\big)^2 \text{ en } +\infty \text{ est } 0.}$

(g) Avec la question 16.b,

$$\forall X > 0, \int_0^X \frac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}\mathrm{d}x = \int_0^X \Big(\Phi(f)(x)\Big)^2\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\frac{\big(h(X)\big)^2}{X^3} + \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x.$$

Donc en faisant tendre X vers $+\infty$, on a

$$\int_0^{+\infty} \Big(\Phi(f)(x)\Big)^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x.$$

Bilan : $\boxed{\|\Phi(f)\|^2 = \frac{2}{3}\langle\Phi(f), f\rangle.}$

Partie V - Étude d'une suite.

17.

```python
def suite_v(n):
    S = 0
    for k in range(1,n+1):
        S = S + k*suite_u(k)
    v = 1/(n*(n+1))*S
    return v
```

18. On suppose dans cette question uniquement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante donc elle converge.

(b) D'après les graphiques, (v_n) semble décroissante, convergente avec une limite moitié moindre que celle de (u_n).

(c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a, pour tout $k \in [\![1, n]\!], u_n \leqslant u_k$ donc $ku_n \leqslant ku_k$ donc $u_n \sum\limits_{k=1}^{n} k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} ku_k$ donc $u_n \frac{n(n+1)}{2} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} ku_k$ donc $u_n \frac{n(n+1)}{2} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{u_n}{2} \leqslant \frac{1}{n(n+1)} \sum\limits_{k=1}^{n} ku_k = v_n$.

D'autre par

$$v_{2n} = \frac{1}{2n(2n+1)}\sum_{k=1}^{2n} ku_k = \frac{1}{2n(2n+1)}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} ku_k}_{=n(n+1)v_n} + \frac{1}{2n(2n+1)}\sum_{k=n+1}^{2n} ku_k.$$

Donc

$$v_{2n} = \frac{1}{2n(2n+1)} \times \Big(n(n+1)v_n\Big) + \frac{1}{2n(2n+1)}\sum_{k=n+1}^{2n} ku_k.$$

Comme la suite (u_j) est décroissante, pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $u_k \leqslant u_{n+1}$ donc en multipliant par $k > 0$ puis en sommant on a

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k u_k \leqslant u_{n+1} \sum_{k=n+1}^{2n} k = u_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n} k\right) = u_{n+1}\left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}\right) = n u_{n+1}\left(\frac{3n+1}{2}\right)$$

Cela permet de conclure

$$v_{2n} \leqslant \frac{n+1}{2(2n+1)} v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)} u_{n+1}.$$

(d) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$(n+2)v_{n+1} = (n+2)\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n+1} k u_k = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} k u_k + (n+1)u_{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k u_k + u_{n+1}$$

$$= n\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k u_k + u_{n+1} = n v_n + u_{n+1}.$$

D'autre part

$$v_{n+1} - v_n = v_{n+1} - \frac{1}{(n+1)n}\sum_{k=1}^{n} k u_k = v_{n+1} - \frac{1}{(n+1)n}\Bigg(\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} k u_k}_{=(n+1)(n+2)v_{n+1}} - (n+1)u_{n+1}\Bigg)$$

$$= v_{n+1} - \frac{1}{(n+1)n}\Big((n+1)(n+2)v_{n+1}\Big) + \frac{1}{n}u_{n+1} = n\frac{1}{n}v_{n+1} - \frac{1}{n}(n+2)v_{n+1} + \frac{1}{n}u_{n+1} = \frac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1}).$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{u_{n+1}}{2} \leqslant v_{n+1}$ donc $u_{n+1} - 2v_{n+1} \leqslant 0$ donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ donc la suite (v_j) est décroissante. Chaque v_n est une somme de réels positifs donc la suite est minorée par 0 donc elle converge.

On pose $\ell = \lim\limits_{+\infty} u_j$ et $\ell' = \lim\limits_{+\infty} v_j$, la relation $\frac{u_n}{2} \leqslant v_n$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donne $\frac{\ell}{2} \leqslant \ell'$

On utilise ensuite la relation $v_{2n} \leqslant \dfrac{n+1}{2(2n+1)} v_n + \dfrac{3n+1}{4(2n+1)} u_{n+1}$.

On sait qu'un polynôme est équivalent à son terme dominant en $+\infty$ donc $\frac{n+1}{2(2n+1)} \sim \frac{1}{4}$ et $\frac{3n+1}{4(2n+1)} \sim \frac{3}{8}$

Donc par passage à la limite $\ell' \leqslant \frac{1}{4}\ell' + \frac{3}{8}\ell$ donc $\frac{3}{4}\ell' \leqslant \frac{3}{8}\ell$ donc $\ell' \leqslant \frac{1}{2}\ell$.

Enfin $\boxed{\ell' = \frac{1}{2}\ell.}$

19. On suppose dans cette question uniquement que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

(a) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{H}_N : \left(\sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k - N v_N\right)$.

Au rang 1, on a $\sum\limits_{k=1}^{1} u_k - 1v_1 = u_1 - \frac{1}{2}u_1 = \frac{1}{2}u_1 = v_1$. Donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.

Supposons $\mathcal{H}_N$ vraie à un rang $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{n=1}^{N+1} v_n = v_{N+1} + \sum_{n=1}^{N} v_n = v_{N+1} + \sum_{k=1}^{N} u_k - N v_N \text{ selon } \mathcal{H}_N.$$

On exploite la question 18.d, pour obtenir $(N+2)v_{N+1} = N v_N + u_{N+1}$ donc $-N v_N = -(N+2)v_{N+1} + u_{N+1}$.

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{N+1} v_n = v_{N+1} + \sum_{k=1}^{N} u_k - (N+2)v_{N+1} + u_{N+1} = \sum_{k=1}^{N+1} u_k - (N+1)v_{N+1}.$$

Donc $\mathcal{H}_{N+1}$ est vraie.

Bilan : $\boxed{\text{Pour tout } N \in \mathbb{N}^*, \mathcal{H}_N \text{ est vraie et } \sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k - N v_N.}$

(b) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ est à terme général positif donc ses sommes partielles forment une suite croissante. Celle-ci converge donc si et seulement elle est majorée. Or, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k - Nv_N \leqslant \sum\limits_{k=1}^{N} u_k$ car $-Nv_N \leqslant 0$.

Comme (u_k) est à terme positif, on a $\sum\limits_{k=1}^{N} u_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{N} u_k + \sum\limits_{k=N}^{+\infty} u_k = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Donc, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{N} v_n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$, ce dernier terme est indépendant de N donc il domine les sommes partielles de la série $\sum v_k$.

Bilan : $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n \text{ converge.}}$

(c) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $Nv_N = -\sum\limits_{n=1}^{N} v_n + \sum\limits_{k=1}^{N} u_k$.

Or les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ et $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$ convergent donc la suite $\left(-\sum\limits_{n=1}^{N} v_n + \sum\limits_{k=1}^{N} u_k\right)_{N\geqslant 1}$ converge.

Donc Nv_N tend vers une limite finie ℓ lorsque l'entier N tend vers $+\infty$.

La suite $(Nv_N)_{N\geqslant 1}$ est à terme positif donc $\ell \geqslant 0$.

Si $\ell > 0$, alors $Nv_N \sim \ell$ donc $v_N \sim \frac{\ell}{N}$. Or la série $\sum\limits_{N\geqslant 1} \frac{\ell}{N}$ diverge comme combinaison linéaire de série harmonique avec $\ell \neq 0$. Par comparaison des séries à terme général positif, $\sum\limits_{N\geqslant 1} v_N$ diverge aussi, cela contredit ce qui précède. Donc $\ell = 0$.

(d) Au 19.a, il est vu que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k - Nv_N$. Comme $Nv_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut conclure $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

20. On considère dans cette question une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

(a) On reprend ce qui précède, avec pour tout $k \in \mathbb{N}^*, u_k = \mathbf{P}(Y = k) \in \mathbb{N}^*$ et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = k) = 1$. Donc les conditions sont réunies pour affirmer qu'avec $v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(Y = k)$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n \geqslant 0$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = 1$ c'est-à-dire $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(Y = k) = 1$

Bilan : Il existe une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(Z = n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(Y = k).$$

(b) On suppose dans cette question que Y admet une espérance, notée $\mathbf{E}(Y)$. Cette espérance est strictement positive car Y est à support dans $\mathbb{N}^*$.

Donc comme $\sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(Y = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}(Y)$, on a

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(Y = k)}{\mathbf{E}(Y)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ donc } \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(Y = k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathbf{E}(Y).$$

D'autre part $\dfrac{1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ donc par produit $\mathbf{P}(Z = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathbf{E}(Y)}{n^2}$.

Cela entraîne $n\mathbf{P}(Z = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathbf{E}(Y)}{n}$.

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{\mathbf{E}(Y)}{n}$ diverge car $\mathbf{E}(Y) \neq 0$. Donc par comparaison des séries à terme général positif, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\mathbf{P}(Z = n)$ diverge donc la variable aléatoire $\boxed{Z \text{ n'a pas d'espérance.}}$