

CORRECTION - RÉVISIONS - PROBABILITÉS DISCRÈTES

Problème 1 - Ecricome ECS 2006 - Problème

Partie I - Étude des longueurs de séries

1.

La première série contient soit que des piles soit que des faces. Et pour que la série face une taille n , il faut que tous les n premiers tirages donnent le même résultat et le $n + 1$ donne le résultat contraire. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} [L_1 = n] &= (P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n \cap F_{n+1}) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n \cap P_{n+1}) \\ &= \left[\left(\left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) \cap F_{n+1} \right) \cup \left(\left(\bigcap_{i=1}^n F_i \right) \cap P_{n+1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Les événements $(\bigcap_{i=1}^n P_i) \cap F_{n+1}$ et $(\bigcap_{i=1}^n F_i) \cap P_{n+1}$ sont disjoints donc :

$$P(L_1 = n) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^n P_i\right) \cap F_{n+1}\right) + P\left(\left(\bigcap_{i=1}^n F_i\right) \cap P_{n+1}\right).$$

Puis comme les événements P_i et F_i sont tous mutuellement indépendants, on a :

$$P(L_1 = n) = \left(\prod_{i=1}^n P(P_i)\right) P(F_{n+1}) + \left(\prod_{i=1}^n P(F_i)\right) P(P_{n+1}).$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on a $P(P_i) = p$ et $P(F_i) = q$. Donc :

$$P(L_1 = n) = p^n q + q^n p.$$

Calculons désormais :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (p^n q + q^n p) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^n q + \sum_{n=1}^{+\infty} q^n p \\ &\quad \text{(les séries convergent comme série à termes géométriques de raison } < 1) \\ &= q \times \frac{p}{1-p} + p \times \frac{q}{1-q} \\ &= \frac{(1-p)p}{1-p} + \frac{p(1-p)}{p} \\ &\quad \text{(on remplace } q \text{ par } 1-p) \\ &= p + (1-p) \\ &= \boxed{1}. \end{aligned}$$

2. (a)

Comme précédemment, si on commence par Pile, si l'événement $[L_1 = n] \cap [L_2 = k]$ cela signifie que l'on a eu n Pile puis k Face et de nouveau un Pile. C'est l'inverse si on commence par Face.

On a donc :

$$\begin{aligned}
 & [L_1 = n] \cap [L_2 = k] \\
 = & \left(\left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^k F_{n+i} \right) \cap P_{n+k+1} \right) \cup \left(\left(\bigcap_{i=1}^n F_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^k P_{n+i} \right) \cap F_{n+k+1} \right).
 \end{aligned}$$

Comme dans la question précédente, l'union est disjointe et les événements sont indépendants, on a donc :

$$\begin{aligned}
 & P([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) \\
 = & P \left(\left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^k F_{n+i} \right) \cap P_{n+k+1} \right) + P \left(\left(\bigcap_{i=1}^n F_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^k P_{n+i} \right) \cap F_{n+k+1} \right) \\
 = & \left(\prod_{i=1}^n P(P_i) \right) \left(\prod_{i=1}^k P(F_{n+i}) \right) P(P_{n+k+1}) + \left(\prod_{i=1}^n P(F_i) \right) \left(\prod_{i=1}^k P(P_{n+i}) \right) P(F_{n+k+1}) \\
 = & p^n q^k p + q^n p^k q \\
 = & \boxed{p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k}.
 \end{aligned}$$

(b)

On utilise désormais la formule des probabilités totales appliqué au système complet d'événements $\{[L_1 = n]\}_{n \geq 1}$:

$$\begin{aligned}
 P(L_2 = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([L_2 = k] \cap [L_1 = n]) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} (p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k) \\
 &= q^k p \sum_{n=1}^{+\infty} p^n + p^k q \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \\
 &\quad \text{(les deux séries convergent bien donc on peut séparer la somme)} \\
 &= q^k p \frac{p}{1-p} + p^k q \frac{q}{1-q} \\
 &= \frac{q^k p^2}{q} + \frac{p^k q^2}{p} \\
 &= \boxed{q^{k-1} p^2 + p^{k-1} q^2}.
 \end{aligned}$$

(c)

L_2 admet une espérance si la série : $\sum_{k=1}^{+\infty} k P(L_2 = k)$ converge absolument. Comme L_2 est positive, c'est équivalent à la convergence simple.

On a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k P(L_2 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k (q^{k-1} p^2 + p^{k-1} q^2).$$

Or les séries $\sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} p^2$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1} q^2$ convergent : ce sont des séries géométriques dérivées.

L_2 admet donc une espérance et on a :

$$\begin{aligned} E(L_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}p^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1}q^2 \\ &= p^2 \frac{1}{(1-q)^2} + q^2 \frac{1}{(1-p)^2} \\ &= p^2 \frac{1}{p^2} + q^2 \frac{1}{q^2} \\ &= \boxed{2}. \end{aligned}$$

Partie II - Étude du nombre de séries lors des n premiers lancers

1.

- N_1 est le nombre de séries sur la première valeur. On a donc toujours $N_1 = 1$. Ainsi N_1 suit une loi certaine. On a donc $E(N_1) = 1$.
- Pour deux lancers, on peut avoir 1 (tous les résultats sont identiques) ou 2 (on obtient un résultat de chaque) séries. Donc $N_2(\Omega) = \{1, 2\}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} P(N_2 = 1) &= P((F_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap F_2)) \\ &= P(F_1)P(P_2) + P(P_1)P(F_2) \\ &\quad (\text{incompatibilité puis indépendance}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On a donc $P(N_2 = 2) = 1 - P(N_2 = 1) = \boxed{\frac{1}{2}}$ puisque ces événements sont contraires dans le cas particulier où on se limite aux deux premiers lancers.

On en déduit :

$$E(N_2) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

- On a de manière similaire $N_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
On peut calculer explicitement $P(N_3 = k)$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$ en donnant les événements à chaque fois, mais on va plutôt s'inspirer de la question suivante afin de commencer à voir comment cela peut marcher dans le cas général.
Cas $N_3 = 1$: S'il y a une seule série, cela signifie que les résultats de tirage sont tous les mêmes (soit tous Pile soit tous Face). On a donc :

$$[N_3 = 1] = (P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3).$$

Par incompatibilité et indépendance, on obtient :

$$P(N_3 = 1) = p^3 + q^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

On va regarder l'autre cas extrême : $[N_3 = 3]$. Cette fois, tous les résultats ne seront pas les mêmes. Mais pour avoir 3 séries, on doit changer de résultat à chaque fois et donc, dès que le premier résultat est connu (pile ou face), tous les suivants sont nécessaires. Ainsi :

$$[N_3 = 3] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3).$$

Puis :

$$P(N_3 = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Et encore une fois, on déduit :

$$P(N_3 = 2) = 1 - P(N_3 = 1) - P(N_3 = 3) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

On peut désormais calculer :

$$E(N_3) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 2.$$

2.

Comme dans la question précédente, on a toujours au moins 1 séries et sur n lancers, on en a au plus n , toutes les valeurs entières intermédiaires étant possibles. On a donc :

$$N_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket.$$

On a alors :

$$[N_n = 1] = \left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^n F_i \right).$$

On en déduit, encore une fois par incompatibilité puis par indépendance :

$$P(N_n = 1) = p^n + q^n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

De même, on peut expliciter l'événement $[N_n = n]$ comme dans la question précédente pour $[N_3 = 3]$:

$$[N_n = n] = \left(\underbrace{P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \dots \cap F_n}_{n \text{ termes}} \right) \cup \left(\underbrace{F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \dots \cap P_n}_{n \text{ termes}} \right).$$

où pour des facilités d'écriture, j'ai écrit le dernier terme dans le cas n pair. On en déduit, une dernière fois par incompatibilité puis par indépendance :

$$P(N_n = n) = \underbrace{p \times q \times p \times \dots \times q}_{n \text{ termes}} + \underbrace{p \times q \times p \times \dots \times q}_{n \text{ termes}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Le cas impair donne le même résultat grâce à la condition $p = q = \frac{1}{2}$ que l'on s'est donnée pour cette question.

3.

```

1 import numpy as np
  import numpy.random as rd

  def simulation(m):
5     X = np.zeros(m)
     N = np.zeros(m)
     X[0] = rd.randint(2)
     N[0] = 1
     for i in range(1,m):

```

```

10     X[i] = rd.randint(2)
       if X[i] == X[i-1]:
           N[i] = N[i-1]
       else:
           N[i] = N[i-1] + 1
15     return N

```

4. Fonction génératrice de N_n .

(a)

Le sujet ne pose pas la question de la convergence et pour cause : la somme est finie. En ce qui concerne l'espérance, on peut appliquer le théorème de transfert (qui ne soulève donc aucune question de convergence) :

$$E(s^{N_n}) = \sum_{k=1}^n s^k P(N_n = k) = G_n(s).$$

(b)

La somme étant finie, G_n est dérivable comme somme de fonctions dérivables. On a de plus pour $s \in [0, 1]$:

$$G'_n(s) = \sum_{k=1}^n P(N_n = k) k s^{k-1}.$$

Donc :

$$G'_n(1) = \sum_{k=1}^n P(N_n = k) k 1^{k-1} = \sum_{k=1}^n P(N_n = k) k.$$

On reconnaît l'espérance de N_n . Donc :

$$G'_n(1) = E(N_n).$$

(c)

L'événement $[N_n = k] \cap P_n$ est l'événement « il y a k séries sur les lancers 1 à n et le dernier lancer est Pile ». Si on suppose que cet événement a lieu et si on se concentre sur les lancers 1 à $n-1$, il y a alors deux possibilités : soit le dernier Pile en $n+1$ est le début d'une nouvelle série, soit il en prolonge une. Formalisons le en terme d'événements.

Il faut se concentrer sur le lancer $n-1$. Les événements F_{n-1} et P_{n-1} forment un système complet d'événements. Donc :

$$[N_n = k] \cap P_n = ([N_n = k] \cap P_{n-1} \cap P_n) \cup ([N_n = k] \cap F_{n-1} \cap P_n)$$

où l'union est disjointe. Par incompatibilité des événements, on a donc :

$$P([N_n = k] \cap P_n) = P([N_n = k] \cap P_{n-1} \cap P_n) + P([N_n = k] \cap F_{n-1} \cap P_n).$$

Commençons par calculer $P([N_n = k] \cap P_{n-1} \cap P_n)$. On a :

$$[N_n = k] \cap P_{n-1} \cap P_n = [N_{n-1} = k] \cap P_{n-1} \cap P_n$$

puisque si P_n et P_{n-1} sont tous deux réalisés, le nombre de séries ne changent pas de $n-1$ à n .
Donc :

$$P([N_n = k] \cap P_{n-1} \cap P_n) = P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1} \cap P_n) = P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1})P(P_n)$$

où la dernière égalité utilise l'indépendance des événements. Et donc finalement :

$$P([N_n = k] \cap P_{n-1} \cap P_n) = \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}).$$

De même, on a :

$$[N_n = k] \cap F_{n-1} \cap P_n = [N_{n-1} = k - 1] \cap F_{n-1} \cap P_n$$

puisque si P_n et F_{n-1} sont tous deux réalisés, le nombre de séries augmente de 1 de $n - 1$ à n .
Donc :

$$P([N_n = k] \cap F_{n-1} \cap P_n) = P([N_{n-1} = k - 1] \cap F_{n-1} \cap P_n) = P([N_{n-1} = k - 1] \cap F_{n-1})P(P_n)$$

où la dernière égalité utilise l'indépendance des événements. Et donc finalement :

$$P([N_n = k] \cap F_{n-1} \cap P_n) = \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k - 1] \cap F_{n-1}).$$

En regroupant, on obtient bien :

$$P([N_n = k] \cap P_n) = \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k - 1] \cap F_{n-1}).$$

On admet la formule donnée par l'énoncé :

$$P([N_n = k] \cap F_n) = \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k - 1] \cap P_{n-1}).$$

Et on utilise désormais la formule des probabilités totales appliquée au système complet P_n, F_n :

$$\begin{aligned} P(N = k) &= P([N = k] \cap P_n) + P([N = k] \cap F_n) \\ &= \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k - 1] \cap F_{n-1}) \\ &+ \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k - 1] \cap P_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}(P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1})) \\ &+ \frac{1}{2}(P([N_{n-1} = k - 1] \cap P_{n-1}) + P([N_{n-1} = k - 1] \cap F_{n-1})) \\ &\quad \text{(on regroupe les termes selon la valeur de } N_{n-1}\text{)} \\ &= \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k - 1). \end{aligned}$$

La dernière ligne provient de l'utilisation de la formule des probabilités totales appliquée avec le système $\{P_{n-1}, F_{n-1}\}$ sur chacune des parenthèses.

(d)

Soit $n \geq 2$ et soit $s \in [0, 1]$. On a :

$$\begin{aligned}
 G_n(s) &= \sum_{k=1}^n P(N_n = k) s^k \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k-1) \right) s^k \\
 &\quad \text{(Formule de la question précédente valable car } n \geq 2) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n P(N_{n-1} = k) s^k + \sum_{k=1}^n P(N_{n-1} = k-1) s^k \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k) s^k + \sum_{k=1}^n P(N_{n-1} = k-1) s^k \right) \\
 &\quad \text{(le dernier terme de la 1}^{\text{ère}} \text{ somme est nul car } P(N_{n-1} = n) = 0) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k) s^k + \sum_{k'=0}^{n-1} P(N_{n-1} = k') s^{k'+1} \right) \\
 &\quad \text{(changement d'indice } k' = k-1) \\
 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k) s^k + \sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k) s^{k+1} \right) \\
 &\quad \text{(le premier terme de la 2}^{\text{ème}} \text{ somme est nul car } P(N_{n-1} = 0) = 0) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k) s^k + s \sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1} = k) s^k \right) \\
 &= \frac{1}{2} (G_{n-1}(s) + s G_{n-1}(s)) \\
 &= \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s).
 \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s).$$

À s fixé, $(G_n(s))$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1+s}{2}$.

Calculons désormais :

On en déduit l'expression de la suite géométrique :

$$G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1} G_1(s) = \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1} s.$$

(e)

Il suffit de se rappeler que $G'_n(1) = E(N_n)$ et c'est cette espérance que l'on veut calculer. D'après la question précédente, on a :

$$G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1} s.$$

G_n est donc dérivable (on le savait déjà dans les premières questions) et :

$$G'_n(s) = \frac{n-1}{2} \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-2} s + \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1}.$$

Donc :

$$G'_n(1) = \frac{n-1}{2} \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-2} \times 1 + \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}.$$

C'est-à-dire :

$$E(N_n) = \frac{n+1}{2}.$$

Partie III - Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

1.

La fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ est convexe puisque sa dérivée seconde est $x \mapsto -(-e^{-x})$ est positive. Elle est donc au dessus de sa tangente en n'importe quel point. Une équation de sa tangente en 0 est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -x + 1.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$1 - x \leq e^{-x}.$$

2. (a)

La série de terme général $P(A_i)$ diverge. Or c'est une série à termes positifs, elle diverge donc vers $+\infty$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k}^n P(A_i) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sum_{i=0}^n P(A_i)}_{\rightarrow +\infty} - \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} P(A_i)}_{\text{constant}} \right) \\ &= \boxed{+\infty}. \end{aligned}$$

(b)

On a :

$$\begin{aligned} P(C_n) &= P\left(\bigcup_{k \leq i \leq n} A_i\right) \\ &= 1 - P\left(\overline{\bigcup_{k \leq i \leq n} A_i}\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{k \leq i \leq n} \overline{A_i}\right) \\ &= \boxed{1 - \prod_{k=i}^n P(\overline{A_i})}. \end{aligned}$$

(car les $\overline{A_i}$ sont indépendants)

Or pour tout $i \in \llbracket k, n \rrbracket$, on a :

$$P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i)$$

et d'après la première question, on a :

$$1 - P(A_i) \leq \exp(-P(A_i)).$$

Donc :

$$0 \leq P(\overline{A_i}) \leq \exp(-P(A_i))$$

où on a précisé que $P(A_i)$ est positive car c'est une probabilité. Cela de les multiplier termes à termes pour obtenir :

$$\prod_{i=k}^n P(\overline{A_i}) \leq \prod_{i=k}^n \exp(-P(A_i))$$

c'est-à-dire :

$$-\prod_{i=k}^n P(\overline{A_i}) \geq -\exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right).$$

Donc :

$$P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^n P(\overline{A_i}) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right).$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k}^n P(A_i) = +\infty$ (d'après la question précédente) donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right) = 0.$$

Par passage à la limite des inégalités larges, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) \geq 1.$$

Or $P(C_n)$ est une probabilité et donc inférieure à 1. Par passage à la limite, on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) \leq 1.$$

Et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = 1.$$

(c)

Pour tout $n \geq k$, on a $C_{n+1} = C_n \cup A_{n+1}$. Donc $C_n \subset C_{n+1}$. Ainsi la suite d'événements $(C_n)_{n \geq k}$ est croissante pour l'inclusion.

On en déduit par le théorème de la limite monotone pour les probabilités que :

$$P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{i=k}^n C_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = 1.$$

(d)

On a clairement :

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$$

puisque $A_i \subset C_i$ pour tout $i \geq k$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $\omega \in \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. Montrons que $\omega \in \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$.

Comme $\omega \in \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$, il existe $n \geq k$ tel que $\omega \in C_n$. Or $C_n = \bigcup_{i=k}^n A_i$. Donc $\omega \in \bigcup_{i=k}^n A_i$. Donc il existe $i \in \llbracket k, n \rrbracket$ tel que $\omega \in A_i$.

Comme $\omega \in A_i$, ω appartient également à l'union $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$. Donc :

$$\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i.$$

Donc par double inclusion :

$$\boxed{\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n.}$$

On en déduit :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n\right) = 1.}$$

3.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note l'événement A_n : « on obtient Pile au $(2n)$ ème et au $(2n+1)$ ème lancers ». On va bien sûr utiliser la question précédente, mais pour cela il faut d'abord vérifier que la série des $P(A_n)$ diverge. On a :

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(P_{2n} \cap P_{2n+1}) \\ &= P(P_{2n})P(P_{2n+1}) \\ &\quad (\text{indépendance}) \\ &= p^2. \end{aligned}$$

Donc $P(A_n)$ ne dépend pas de n et la série des $P(A_n)$ diverge (et même diverge grossièrement).
Donc d'après la question précédente, on a :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1.}$$

Notons l'événement B_k : « on obtient deux Pile consécutifs après le lancer k ». On a :

$$\begin{aligned} B_k &= \bigcup_{i=k}^{+\infty} (P_i \cap P_{i+1}) \\ &= \bigcup_{i=k}^{+\infty} (P_{2k} \cap P_{2k+1}) \cup \bigcup_{i=k}^{+\infty} (P_{2k+1} \cap P_{(2k+1)+1}) \\ &\quad (\text{On sépare les termes pairs et impairs}) \\ &= \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} (P_{2k+1} \cap P_{(2k+1)+1})\right). \end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset B_k.}$$

Ainsi :

$$P(B_k) \geq P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) \geq 1.$$

Or $P(B_k) \leq 1$ puisque c'est une probabilité. Donc :

$$\boxed{P(B_k) = 1.}$$

Ainsi la probabilité d'obtenir deux Pile consécutifs après n'importe quel lancer vaut bien 1.