Inégalités et encadrements

1. Manipulation d'une inégalité ou d'un encadrement

1.1. Règles de base

★ On **conserve le sens** d'une inégalité ou d'un encadrement en :

- additionnant ou soustrayant un même nombre à ses membres ;
- multipliant ou divisant par un même nombre **strictement positif** tous ses membres ;
- passant tous les membres à l'exponentielle ;
- passant tous les membres au logarithme **(lorsque tous les membres sont strictement positifs)** ;
- passant tous les membres à la racine carrée **(lorsque tous les membres sont positifs)** ;
- passant tous les membres au cube ;
- passant tous les membres à la puissance α **(avec $\alpha > 0$ et les membres strictement positifs)**
- passant tous les membres au carré **(lorsque tous les membres sont positifs)**
- prenant l'intégrale de tous les membres avec les bornes classées "dans le bon sens"...

... par croissance des fonctions affines de coefficient directeur strictement positif, exponentielle, logarithme népérien, racine carrée, cube et puissance α ($\alpha > 0$) sur leurs domaines de définition, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$, et par croissance de l'intégrale.

★ On **change le sens** d'une inégalité en :

- multipliant ou divisant par un même nombre **strictement négatif** tous ses membres ;
- passant tous les membres à l'inverse **(lorsque tous les membres sont strictement négatifs)** ;
- passant tous les membres à l'inverse **(lorsque tous les membres sont strictement positifs)** ;
- passant tous les membres à la puissance α **(avec $\alpha < 0$ et les membres strictement positifs)**
- passant tous les membres au carré **(lorsque tous les membres sont négatifs)**...

... par décroissance des fonctions affines de coefficient directeur strictement négatif et puissance α ($\alpha > 0$) sur leurs domaines de définition, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$ et par décroissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^-$.

★ Une inégalité stricte peut-être élargie : si $x > 2$, il est correct d'affirmer que $x \geq 2$

1.2. Points de vigilance ⚠

- Bien vérifier tout ce qui est écrit en gras dans les paragraphes précédents.
- Procéder une étape après l'autre en justifiant à chaque étape
- Ne surtout pas multiplier (ou encore pire diviser) une inégalité par 0 ou par un nombre dont on ne connaît pas le signe
- On peut élargir une inégalité stricte mais pas faire le contraire
- Utiliser des règles précises. Bannir les formulations obscures du genre "~~passer de l'autre côté~~", "~~enlever la racine~~", "~~enlever le ln~~"

2. Manipulation de deux inégalités ou deux encadrements

2.1. Règles de base

★ Quand on dispose de deux inégalités ou de deux encadrements écrits dans le même sens, on a le droit :

- de les additionner membre à membre ;
- de les multiplier membre à membre **(lorsque tous les membres sont positifs)** ;

ET C'EST TOUT ! Toutes les autres manipulations devront se ramener à ces situations là !

★ Techniques utiles :

1. Si un encadrement possède des bornes négatives et positives, il faut distinguer deux cas selon le signe de la quantité encadrée
2. Si on veut encadrer $x - y$, on additionnera l'encadrement de x avec celui de $-y$
3. Si on veut encadrer $\frac{x}{y}$, on multipliera l'encadrement de x avec celui de $\frac{1}{y}$

2.2. Points de vigilance ⚠

- Ne jamais multiplier membre à membre des inégalités faisant intervenir ne serait-ce qu'un seul nombre négatif
- Ne pas vouloir aller trop vite
- Pas de free-style du type soustraire membre à membre, diviser membre à membre... qui sont des règles INTERDITES

3. Techniques utiles à connaître

3.1. Connaitre les inégalités de référence

Parmi elles, on citera, sous réserve de validation de certaines hypothèses à connaître et à vérifier pour les items 5, 9 et 10 :

1. L'inégalité triangulaire, version basique : $|x+y| \leq |x|+|y|$
2. L'inégalité triangulaire avec des Σ : $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$
3. L'inégalité triangulaire, version intégrale : $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \left|f(t)\right| \mathrm{d}t$
4. L'encadrement définissant la fonction partie entière : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
5. L'inégalité des accroissements finis : si [hyp], alors $\left|f(x_1)-f(x_2)\right| \leq k|x_1-x_2|$
6. Les inégalités de convexité classiques : $e^x \leq 1+x$ et $\ln(1+x) \leq x$
7. l'encadrement de la covariance : $-\sigma(X)\sigma(Y) \leq \mathrm{Cov}(X,Y) \leq \sigma(X)\sigma(Y)$
8. l'inégalité portant sur les écarts-types des trois v.a.r. X, Y et $X+Y$: $\sigma(X+Y) \leq \sigma(X)+\sigma(Y)$
9. L'inégalité de Markov : si [hyp], alors $\forall a>0, \quad \mathrm{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{a}$
10. L'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev : si [hyp], alors $\forall t>0, \quad \mathrm{P}\left(\left|X-\mathrm{E}(X)\right| \geq t\right) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{t^2}$

3.2. Justifier une inégalité par une étude de signe

Tout bête mais à garder en mémoire car très efficace dans certaines situations :
Justifier une inégalité $a \leq b$, c'est la même chose que prouver que $a-b$ est négatif, et c'est donc avant tout une justification de signe !

- On cherchera donc à **factoriser** l'expression $a-b$ avant de faire un tableau de signes.
- Dans certains cas, le signe d'une expression développée est évident s'il s'agit d'une combinaison linéaire à coefficients positifs (ou à coefficients négatifs) de nombres manifestement positifs (carrés, racines, exponentielles, trinôme de discriminant négatif)

3.3. Justifier un encadrement en le décomposant en deux inégalités

Pour prouver que $a \leq b \leq c$, il est parfois impératif d'utiliser la propriété : $a \leq b \leq c \iff \begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases}$

3.4. Problématiques d'extrema

3.4.1. Comparer deux fonctions

Pour montrer que $f(x) \leq g(x)$ (resp. $f(x) \geq g(x)$) sur un intervalle I, on peut étudier les variations de la fonction φ définie sur I par $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ et prouver qu'elle admet un maximum négatif (resp. un minimum positif) sur I.
Rappel : une fonction admet un extremum lorsque sa dérivée s'annule en changeant de signe, on commence donc par dériver φ

3.4.2. Majorer ou minorer une quantité dépendant d'une variable réelle

- On peut étudier les variations de la fonction de cette variable et trouver un minorant ou un majorant sur l'intervalle considéré. (c'est à peu de choses près la même technique que le paragraphe précédent)
- On peut partir d'une inégalité portant sur la variable et la transformer à l'aide d'opérations élémentaires décrites en § **??**. Attention toutefois à bien gérer pour avoir la finesse requise.

3.4.3. Majorer ou minorer une quantité dépendant de deux variables réelles

Un chapitre est dédié aux problématiques de recherche d'extrema des fonctions de deux variables. Il s'agit d'étudier l'annulation du gradient sur un ouvert et de faire l'étude du signe des valeurs propres des matrices hessiennes en ces points critiques sur cet ouvert pour trouver les extrema locaux. On doit ensuite regarder si ce sont des extrema globaux en effectuant une étude de signe.

3.4.4. Majorer ou minorer une somme (grossièrement mais des fois ça suffit)

On peut majorer ou minorer une somme de n termes assez grossièrement en disant qu'elle est plus grande que n fois son plus petit terme et qu'elle est plus petite que n fois son plus grand terme

4. Exercices d'entraînement

4.1. Sur les manipulations d'une inégalité ou d'un encadrement

4.2. Sur les manipulations de deux (ou plus) inégalités ou encadrements

4.3. Sur les techniques diverses

4.3.1. Sur la reconnaissance d'inégalités usuelles

4.3.2. Par une étude de signe

4.3.3. Par la décomposition d'un encadrement en deux inégalités

★ *Exercice 1*

Á partir de l'inégalité définissant la partie entière (item 4) du paragraphe **??**, trouver un encadrement de $\lfloor x \rfloor$ d'amplitude 1.

4.3.4. Par des problématiques de recherche d'extrema