Calculs de dérivées, recherche de limites
et plus si affinité :
variations, convexité, tangentes et asymptotes...

Enoncés

Pour chacune des fonctions suivantes, tirées des annales du concours ECRICOME entre les années 1998 et 2015, on calculera les limites aux bornes du domaine proposé, on justifiera correctement la régularité sur ce domaine, on calculera la dérivée, voire la dérivée seconde et on étudiera les variations et/ou la convexité sur ce domaine, selon ce qui est demandé.
On mentionnera systématiquement les tangentes horizontales, et les asymptotes verticales et/ou horizontales et les extrema locaux lorsqu'ils existent, bien que cela ne soit pas demandé.

Exercice 1 (ECRICOME 2015)
$g(x) = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
Classe $\mathscr{C}^2$, variations et convexité.

Exercice 2 (ECRICOME 2014)
$f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$ sur $]0;+\infty[$
Dérivabilité, calcul de dérivée.

Exercice 3 (ECRICOME 2013)
$\varphi(x) = \frac{x\ln x - 1}{x}$ sur $]0;+\infty[$
Classe $\mathscr{C}^1$, variations.

Exercice 4 (ECRICOME 2012)
$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$ sur $]0;+\infty[$
dérivabilité et variations.

Exercice 5 (ECRICOME 2011)
$\varphi(x) = 1 - x^2\ln x$ sur $]0;+\infty[$
Classe $\mathscr{C}^1$ et variations.

Exercice 6 (ECRICOME 2010)
$\varphi(x) = \ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
Dérivabilité et variations.

Exercice 7 (ECRICOME 2009)
$\varphi(x) = 2\ln\frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$
Classe $\mathscr{C}^1$ et calcul de la dérivée.

Exercice 8 (ECRICOME 2008)
$p \in \mathbb{N}^*$, $f_p(x) = 1 + \ln(x+p)$ et $h_p(x) = x - f_p(x)$ sur $\mathbb{R}_+$
Dérivabilité et variations de h_p.

Exercice 9 (ECRICOME 2007)
$a > 0$, $f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right)$ sur $]0;+\infty[$
Classe $\mathscr{C}^1$ et variations.

Exercice 10 (ECRICOME 2006)
$f(x) = x + 1 + 2e^x$ sur $\mathbb{R}$
Dérivabilité et variations.

Exercice 11 (ECRICOME 2005)
$f(x) = x^2 - x\ln x - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
Classe $\mathscr{C}^2$ et convexité.

Exercice 12 (ECRICOME 2004)
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$
Dérivabilité et variations.

Exercice 13 (ECRICOME 2002)
$n \in \mathbb{N}^* \subset \{1\}$, $h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$ sur $]-1;+\infty[$
Dérivabilité et variations de h_n, calcul de $h_n(0)$ et signe de $h_n(x)$
$f_n(x) = x^n\ln(1+x)$ sur $]-1;+\infty[$
Dérivabilité de f_n, expression de $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$
Variations de f_n (deux cas à traiter en fonction de la parité de n)
Limites de f_n uniquement demandées.

Exercice 14 (ECRICOME 1998)
$g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln(1+x)}{x}$ sur $]0;+\infty[$
Classe $\mathscr{C}^1$ et variations.

Réponses plus ou moins détaillées page suivante...

Corrections

Exercice 1 (ECRICOME 2015)

$g(x) = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
Classe $\mathscr{C}^2$, variations et convexité.

- Il est important de justifier chaque calcul de limite (plus ou moins brievement selon les cas) :
  - $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ **par opérations sur les limites** (ici, pas d'indétermination)
  (à détailler si l'opération, certes non indéterminée, est plus complexe).
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissances comparées
  Conséquence : $\mathscr{C}_g$ admet pour **asymptote horizontale** la droite d'équation $y = 0$ en $+\infty$
  (on remarquera qu'on a dû légèrement modifier l'écriture pour faire apparaître la croissance comparée)

- g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ POSFU.
  (ici, en l'absence de racine, logarithme ou fraction, il n'y a aucun point de vigilance à évoquer)

- Calcul de la dérivée et conséquences :
  (Pour s'aider, au besoin, au brouillon, on pose $u(x) = x$, $v(x) = e^{-x}$ avant d'appliquer la formule $(uv)' = u'v + uv'$.
  On est bien conscient que pour dériver v, on applique la formule $(e^u)' = u'e^u$!)
  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$
  donc, $g'(x)$ **étant du même signe que** $1-x$, c'est à dire positive avant 1 et négative après 1 :
  (cette étape peut avantageusement se faire avec un tableau de signes pour les cas plus complexes)
  f est croissante sur $]0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$.
  f admet un **maximum** de $\frac{1}{e}$ atteint en 1.
  $\mathscr{C}_f$ admet en 1 une **tangente horizontale** d'équation $y = \frac{1}{e}$

- Calcul de la dérivée seconde et conséquences :
  De même, (poser éventuellement les fonctions u et v au brouillon)
  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$
  $g''(x)$ étant du même signe que $x-2$, c'est à dire négative avant 2 et positive après, (idem, faire un tableau au besoin) :
  f est concave sur $]0;2]$ et convexe sur $[2;+\infty[$.

Exercice 2 (ECRICOME 2014)

$f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$ sur $]0;+\infty[$
Dérivabilité, calcul de dérivée.

-
  - $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ donc, par passage au quotient, $f(x) \underset{0}{\sim} 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{1+x}{\ln(1+x)}}_{\substack{\to+\infty \\ \text{par c.c}}} \times \underbrace{\frac{x}{1+x}}_{\sim\frac{x}{x}\to 1} = +\infty$
  Par manque de temps ou d'aisance, on aurait pu considérer ici qu'un "par croissances comparées" sans transformation d'écriture aurait pu suffire.

- Sur $]0;+\infty[$, $\boldsymbol{1+x>0}$ et $\boldsymbol{\ln(1+x)\neq 0}$ (car $\boldsymbol{1+x\neq 1}$), donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ POSFU.
  (on a bien veillé à vérifier/dire que **l'argument du logarithme est strictement positif** et que le **quotient est non nul**)

- $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \ldots = \dfrac{(x+1)\ln(x+1)-x}{(x+1)\big(\ln(x+1)\big)^2}$

Exercice 3 (ECRICOME 2013)

$\varphi(x) = \frac{x\ln x - 1}{x}$ sur $]0;+\infty[$
Classe $\mathscr{C}^1$, variations.

-
  - Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ (par croissances comparées), on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\overbrace{x\ln x - 1}^{\to -1}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}} = -\infty$.
  Remarque : C_φ admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

- $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x\ln x}{x} \sim \ln x \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$.
$\frac{\varphi(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ (par croissances comparées)

▶ φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions usuelles (car $x \neq 0$)

▶ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \frac{x\ln x - 1}{x} = \ln x - \frac{1}{x}$ $\varphi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ φ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 (ECRICOME 2012)

$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$ sur $]0;+\infty[$
dérivabilité et variations.

▶ • Comme $e^{-x} - 1 \underset{0}{\sim} -x$, on en déduit que $1 - e^{-x} \underset{0}{\sim} x$, puis par quotient que $f(x) \underset{0}{\sim} 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

- $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (ou justification sans équivalents : $f(x) = \frac{1-\overbrace{e^{-x}}^{\to 0}}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$)
Dans tous les cas, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

▶ f est dérivable sur $]0,+\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles et, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{e^{-x}x - (1-e^{-x})}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

en posant pour tout $x > 0$

$$\varphi(x) = (x+1)\,e^{-x} - 1.$$

▶ φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions usuelles $(x \neq 0)$ et, pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = e^{-x} - (x+1)\,e^{-x} = -xe^{-x} < 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Donc on en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 5 (ECRICOME 2011)

$\varphi(x) = 1 - x^2\ln x$ sur $]0;+\infty[$
Classe $\mathscr{C}^1$ et variations.

Réponses brutes, à étoffer, justifier et rédiger :

▶ • $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$

Pas d'asymptote.

▶ $\varphi'(x) = -2x\ln x - x$
φ est croissante sur $\left]0;e^{-1/2}\right]$ et décroissante sur $\left[e^{-1/2};+\infty\right[$
f admet un maximum de $1 + \frac{1}{2e}$ atteint pour $x = e^{-1/2}$.
$\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale en $e^{-1/2}$ d'équation $y = 1 + \frac{1}{2e}$

Exercice 6 (ECRICOME 2010)

$\varphi(x) = \ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
Dérivabilité et variations.

Réponses brutes, à étoffer, justifier et rédiger :

▶ • $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = +\infty$ (asympt vert)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ (asympt horiz)

▶ $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2(x+1)} < 0$
φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 7 (ECRICOME 2009)

$\varphi(x) = 2\ln\frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$
Classe $\mathscr{C}^1$ et calcul de la dérivée.

Réponses brutes, à étoffer, justifier et rédiger :

- $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = +\infty$ (asympt vert)
  $\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = +\infty$

- $\varphi'(x) = \frac{2x-1}{x^2}$
  φ est décroissante sur $]0;1/2]$ et croissante sur $[1/2;+\infty[$, minimum tangente horizontale.

Exercice 8 (ECRICOME 2008)

$p \in \mathbb{N}^*$, $f_p(x) = 1+\ln(x+p)$ et $h_p(x) = x - f_p(x)$ sur $\mathbb{R}_+$
Dérivabilité et variations de h_p.

Réponses brutes, à étoffer, justifier et rédiger :

- • $h_p(0) = -1-\ln(p)$
  • $\lim_{x\to +\infty} h_p(x) = +\infty$

- $h_p'(x) = \frac{x+p-1}{x+p}$ h_p strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9 (ECRICOME 2007)

$a>0$, $f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t+\frac{a^2}{t}\right)$ sur $]0;+\infty[$
Classe $\mathscr{C}^1$ et variations.

Réponses brutes, à étoffer, justifier et rédiger :

- $\lim_{t\to 0} f_a(t) = +\infty$ (asympt. vert.)
  $\lim_{t\to +\infty} f_a(t) = +\infty$

- $f_a'(t) = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{a^2}{t^2}\right)$
  f_a est décroissante sur $]0;a]$ et croissante sur $[a;+\infty[$ minimum tangente horizontale.

Exercice 10 (ECRICOME 2006)

$f(x) = x+1+2e^x$ sur $\mathbb{R}$
Dérivabilité et variations.

Réponses brutes, à étoffer, justifier et rédiger :

- • $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$
  • $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

- $f'(x) = 1+2e^x > 0$
  f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 (ECRICOME 2005)

$f(x) = x^2 - x\ln x - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
Classe $\mathscr{C}^2$ et convexité.

Réponses brutes, à étoffer, justifier et rédiger :

- • $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$
  • $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

- • $f'(x) = 2x - \ln x - 1$
  • $f''(x) = 2 - \frac{1}{x}$
  f est concave sur $]0;1/2]$ et convexe sur $[1/2;+\infty[$.
  f' est décroissante sur $]0;1/2]$ et croissante sur $[1/2;+\infty[$, elle admet en $1/2$ un minimum qui vaut $\ln 2 > 0$
  f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 12 (ECRICOME 2004)

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$
Dérivabilité et variations.

Réponses brutes, à étoffer, justifier et rédiger :

- ▶ • $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ (asympt. horiz)
  • $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ (asympt. horiz)

- ▶ $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
  f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$ maximum tangente horizontale.

Exercice 13 (ECRICOME 2002)

$n\in\mathbb{N}^*\subset\{1\}$, $h_n(x)=n\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}$ sur $]-1;+\infty[$
Dérivabilité et variations de h_n, calcul de $h_n(0)$ et signe de $h_n(x)$
$f_n(x)=x^n\ln(1+x)$ sur $]-1;+\infty[$
Dérivabilité de f_n, expression de $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$
Variations de f_n (deux cas à traiter en fonction de la parité de n)
Limites de f_n uniquement demandées.

- ▶ Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
  h_n est de classe C^2 sur $]-1,+\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles (car $1+x$, l'argument du logarithme et le dénominateur de la fonction n'est pas nul et est strictement positif) et, pour tout $x\in]-1,+\infty[$,

$$h_n'(x)=\frac{n}{1+x}+\frac{1+x-x}{(1+x)^2}=\underbrace{\frac{n}{1+x}}_{>0}+\underbrace{\frac{1}{(1+x)^2}}_{>0}>0.$$

  h_n est donc strictement croissante sur $]-1,+\infty[$.

- ▶ $h_n(0)=0$. D'où, comme h_n est strictement croissante, on a :

x	-1		0		$+\infty$
$h_n(x)$		-	0	+	

- ▶ • f_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles et, pour tout $x\in]-1,+\infty[$,

$$f_n'(x)=nx^{n-1}\ln(1+x)+\frac{x^n}{1+x}=x^{n-1}h_n(x).$$

  • D'où,

x	-1		0		$+\infty$
$h_n(x)$		-	0	+	
x^{n-1}		-	0	+	
$f_n'(x)$		+	0	+	
$f_1(x)$	$-\infty$		↗		$+\infty$

Si n est pair

x	-1		0		$+\infty$
$h_n(x)$		-	0	+	
x^{n-1}		+	0	+	
$f_n'(x)$		-	0	+	
$f_1(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

si n est impair

Exercice 14 (ECRICOME 1998)

$g(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)-\frac{\ln(1+x)}{x}$ sur $]0;+\infty[$
Classe $\mathscr{C}^1$ et variations.

Réponses brutes, à étoffer, justifier et rédiger :

- ▶ $\lim_{x\to 0} g(x)=-\infty$ (à justifier)
  $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ (à justifier)

- ▶ Puisque, sur $]0;+\infty[$, $x+1\neq 0$ et $x\neq 0$, mais aussi $\frac{x}{x+1}>0$ et $1+x>0$, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ POSFU.

- ▶ $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $g'(x)=\ldots=\frac{\ln(1+x)}{x^2}$
  $g'(x)$ est du même signe que $\ln(1+x)$, qui est du même signe que x, donc strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.