Espaces vectoriels réels de dimension finie

1. Espace vectoriel réel de dimension finie et de combinaison linéaire

1.1. Notion de combinaison linéaire

1.1.1. Définition

Etant donnés n réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, on appelle combinaison linéaire de $u_1,\dots,u_n$ toute expression de la forme $\lambda_1 u_1+\dots+\lambda_n u_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u_k$
Les coefficients $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont appelés **scalaires**.

1.1.2. Exemples utiles

- Un polynôme est une combinaison linéaires de puissances entières
- Pour résoudre un système linéaire, on utilise des combinaisons linéaires de lignes
- La formule des probabilités totales est une combinaison linéaire de probabilités conditionnelles dont les scalaires sont des probabilités.

1.2. Espace vectoriel de dimension n

Un espace vectoriel E est un ensemble d'éléments appelés vecteurs, avec lesquels on peut former des combinaisons linéaires et dans lequel certaines règles calculatoires sont possibles :

1.2.1. Quelques définitions préliminaires

- On appelle loi de composition interne (LCI) la loi "$+$" telle que : $\forall (x,y)\in E^2,\quad x+y\in E$
- On appelle loi de composition externe (LCE) la loi "$\cdot$" telle que : $\forall (\lambda,x)\in\mathbb{R}\times E,\quad \lambda\cdot x\in E$ (on notera plus souvent λx)

1.2.2. Définition

On appelle $\mathbb{R}-$espace vectoriel, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou plus simplement espace vectoriel tout ensemble E NON VIDE, muni d'une LCI notée $+$ et d'une LCE notée $\cdot$ qui vérifient :

- La LCI est commutative : $\forall (u,v)\in E^2,\quad u+v=v+u$
- La LCI est associative : $\forall (u,v,w)\in E^2,\quad u+(v+w)=(u+v)+w$ on notera plus simplement $u+v+w$
- élément neutre pour $+$: il existe un unique élément 0_E ou 0 de E tel que $\forall u\in E,\quad 0+u=u+0=u$
- inversibilité des éléments de E par la LCI : $\forall u\in E,\quad \exists ! v\in E$ tel que $u+v=v+u=0$ v est alors noté $-u$.
- $\forall (\lambda,\mu)\in E^2,\quad \lambda(\mu u)=(\lambda\mu)u$
- Distributivité de $\cdot$ par rapport à $+_E$: $\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall (u,v)\in E^2,\quad \lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$
- Distributivité de $\cdot$ par rapport à $+_{\mathbb{R}}$: $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\forall u\in E,\quad (\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$
- élément neutre pour $\cdot$: $\forall u\in E\quad 1\cdot u=u$

1.2.3. Dimension d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension n lorsqu'il existe une bijection de E sur $\mathbb{R}^n$ qui vérifie :

$$\forall (u,v)\in E^2,\forall\lambda\in\mathbb{R}\qquad f(u+\lambda v)=f(u)+\lambda f(v)$$

1.3. Les espaces vectoriels de référence

1.3.1. $\mathbb{R}^n$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension n

1.3.2. $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$

♡ $\forall (n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension np.
On peut par exemple considérer l'application $f:\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{np}; A\mapsto (a_{11};\dots;a_{1p};\ a_{21};\dots;a_{2p}\ ;\dots;\ a_{n1};\dots;a_{np})$

1.3.2.bis. Le cas particulier avec lequel on travaillera le plus souvent : $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$

C'est un espace vectoriel de dimension n.

1.3.3. $\mathbb{R}_n[x]$

♡ $\forall n\in\mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$.

Pour s'en convaincre, on peut considérer l'application $f:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}^{n+1}; P\mapsto(a_0;\dots;a_n)$ avec $P=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$

1.4. Sous espaces vectoriels

1.4.1. Définition

Soit E un espace vectoriel. Un sous espace vectoriel de E est :

- un sous-ensemble de E
- non vide
- stable par combinaison linéaire

1.4.2. Remarque : Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel

1.4.3. Méthode pratique

♡ On vérifiera les trois points suivants pour savoir si F est un sous-espace vectoriel de E :

- $F\subset E$
- $0\in F$
- $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(u,v)\in F^2,\qquad \lambda u+v\in F$

1.4.4. Remarques

- Il est assez exceptionnel que l'on se serve de cette méthode pour prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel. Dans 95% des cas, on utilisera la méthode du paragraphe 2.1.4. On le fait tout de même à titre d'exemple dans l'exercice 1 et 2 pour les rares cas où on ne peut pas faire autrement.
- Mais en fait cette méthode est parfois plus utile pour se convaincre qu'un ensemble n'**est pas** un espace vectoriel (ex 3 et 4).

★ *Exercice 1 (★★)*

Dans chaque cas, montrer que F est un espace vectoriel.

⚠ *Dans chaque cas, les vecteurs u et v du troisième point de la méthode sont des "objets mathématiques" différents.*
Dans la première question, ce sont des couples, dans la deuxième, ce sont des matrices, et dans la troisième des polynômes.
On utilisera donc dans chaque cas des notations adaptées (M et M' dans la deuxième et P et Q dans la troisième par exemple).

1. $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note O_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $F=\left\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AMA=O_n\right\}$
2. $F=\left\{P\in\mathbb{R}_2[x],\ \forall x\in\mathbb{R}, P(x)+xP'(x)=0\right\}$

1.
   - $F\subset\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
   - La matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à F puisque $AO_nA=O_n$
   - Soient $(M,M')\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors $AMA=O_n$ et $AM'A=O_n$. Montrons que $A(M+\lambda M')A=O_n$.
     $A(M+\lambda M')A=AMA+\lambda AM'A=O_n+\lambda O_n \underset{\substack{M\in F\\ M'\in F}}{=} O_n$ donc $M+\lambda M'\in F$ et donc F est stable par combinaisons linéaires.

   Donc F est un espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, espace vectoriel de référence.
2.
   - $F\in\mathbb{R}_2[X]$
   - Le polynôme nul de $\mathbb{R}_2[X]$ est dans F. En effet, en notant P_0 ce polynôme :
     $\forall x\in\mathbb{R},\ \ P_0(x)=0$ et donc $P_0'(x)=0$ Par conséquent : $P_0(x)+xP_0'(x)=0+0x=0$
   - Soient $(P,Q)\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrons que $P+\lambda Q\in F$,
     $\forall x\in\mathbb{R},\ (P+\lambda Q)(x)+x(P+\lambda Q)'(x)=P(x)+\lambda Q(x)+x\big(P'(x)+\lambda Q'(x)\big)=P(x)+xP'(x)+\lambda\big(Q(x)+xQ'(x)\big)\underset{\substack{P\in F\\ Q\in F}}{=}0+\lambda 0=0$

   Donc F est un espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, espace vectoriel de référence.

★ *Exercice 2 (★★)*

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante : $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

Pour tout réel λ, on note $E_\lambda(A)$ l'ensemble des vecteurs colonne X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $AX=\lambda X$.

Justifier que, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

★ *Exercice 3*
Les ensembles suivant sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $F = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AMA = I_n\right\}$
2. $F = \left\{P \in \mathbb{R}_2[x],\ \forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = 1\right\}$
3. $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ z = 1\right\}$

1. La matrice carrée nulle d'ordre n O_n n'appartient pas à F puisque $AO_nA = O_n \neq I_n$ donc F ne peut-être un espace vectoriel.
2. Le polynôme nul ne vérifie pas $P'(x) = 1$ mais $P'(x) = 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$ donc F ne peut pas être un espace vectoriel.
3.

1.4.5. Sous-espaces vectoriels triviaux

$\{0\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels E appelés sous-espaces vectoriels triviaux.

2. Familles de vecteurs

2.1. Notion de sous-espace vectoriel engendré

2.1.1. Sous-espace engendré

Soit E un espace vectoriel, p un entier naturel non nul et $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle espace vectoriel engendré par $(e_1, \ldots, e_p)$ et on note $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires que l'on peut former avec les éléments de $(e_1, \ldots, e_p)$.

♡ Autrement dit, un vecteur u appartient à $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ si et seulement s'il existe un $p-$uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ de $\mathbb{R}^p$ tel que $u = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k$

Exemple :
$e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $2e_1 - 3e_2 + 5e_3 - 4e_4$, et $3e_1 - 2e_4$ sont des exemples de vecteurs appartenant à $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$. Il y en a une infinité !

2.1.2. Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, la première bissectrice $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est engendrée par $u = (1,1)$.
  On note $\mathscr{D} = \text{Vect}\big((1,1)\big)$ ou $\text{Vect}(u)$. Ainsi, $\mathscr{D}$ est un espace vectoriel. **Remarque** :On a aussi : $\mathscr{D} = \text{Vect}\big((2,2)\big)$
- Toute droite passant par l'origine est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par n'importe quel vecteur directeur de cette droite.
- Dans $\mathbb{R}_2[x]$, $\text{Vect}\big(1, x\big)$ est le sous-espace vectoriel des fonction affines.

2.1.3. Propriété

$\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $(e_1, \ldots, e_p)$

2.1.4. Remarque

⚠ Exprimer un sous-ensemble d'un espace vectoriel comme étant un espace vectoriel engendré est souvent un moyen très efficace pour montrer qu'on est en présence d'un sous-espace vectoriel.

★ *Exercice 4*
Dans chaque cas, montrer que F est un espace vectoriel.

1. $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x - 2y = 0\right\}$
2. F est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

1. $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x - 2y = 0\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 2y\right\} = \left\{(2y, y), y \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\big((2,1)\big)$ donc F est un espace vectoriel.
2. $F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{aI_2 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \text{Vect}\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ donc F est un espace vectoriel.

★ *Exercice 5 (Incontournable)*
Montrer que $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ 2x + z = 0 \text{ et } x + y = 0\right\}$ est un espace vectoriel.

★ *Exercice 6 (Incontournable)*
Reprendre les notations de l'exercice 2

1. Montrer que $E_0(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ en l'exprimant en tant que sous-espace engendré.
2. Montrer que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ en l'exprimant en tant que sous-espace engendré.
3. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2.2. Familles génératrices d'un espace vectoriel

2.2.1. Définition

Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille finie de vecteurs de E.
♡ On dit que $\mathscr{F}$ engendre (ou est génératrice de)E si tout vecteur de E peut s'écrire d'au moins une façon comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{F}$, c'est à dire $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

2.2.2. Remarque

Une famille génératrice n'est pas nécessairement minimale, il peut y avoir des répétitions, certains vecteurs combinaison linéaires d'autres, le vecteur nul, ...
$(1, x, x^2)$, $\quad (x^2+x+1, x^2+1, x, 1) \quad (x^2, x+1, 2, 0)$ sont toutes génératrices de $\mathbb{R}_2[x]$, mais $(x^2, 1)$ ne l'est pas.

2.2.3. Proposition

Si une famille contient une sous-famille génératrice, alors elle est génératrice.

2.2.4. Simplification d'une famille génératrice

Une famille génératrice de E reste une famille génératrice de E si :

- on retire le vecteur nul ;
- on retire les occurrences multiples ;
- on retire un vecteur qui est combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille ;
- on effectue des opérations de Gauss sur les vecteurs de la famille

★ *Exercice 7*
Simplification de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ et $\mathrm{Vect}(\mathscr{G})$ avec $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\mathscr{G} = \big((1;2), (0;0), (1;-1), (2;1)\big)$.

1. On remarque que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$
2.

2.3. Indépendance linéaire

2.3.1. Définition

Une famille de vecteurs est dite liée si l'un de ses éléments peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres. Elle est dite libre sinon et on dit alors que ses vecteurs sont linéairement indépendants.
Exemple : les familles de l'exemple précédent sont liées.

2.3.2. Propositions

- Une sous-famille d'une famille libre est libre.
- Une famille contenant une sous-famille liée est liée.

2.3.3. Méthode

Pour déterminer si une famille $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_p)$ est libre ou liée, on peut étudier l'équation $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0$ d'inconnues $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$:
♡ ↪ si la seule solution est $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, alors la famille est libre ;
↪ sinon, elle possède au moins une solution dans laquelle un $\lambda_k \neq 0$, elle est liée.

★ *Exercice 8 (incontournable)*
Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est libre.

2.3.4. Cas particuliers simples

- Une famille réduite à un vecteur est libre si et seulement ce vecteur n'est pas nul.
- une famille à deux vecteurs est libre si et seulement s'ils ne sont pas colinéaires.
- une famille contenant le vecteur nul est liée.
- une famille contenant plusieurs fois le même vecteur est liée.
- une famille contenant deux vecteurs colinéaires est liée.
- une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre.
- une famille de vecteurs ou de matrices à zéros échelonnés est libre.

2.3.5. Propriété

Les opérations de Gauss préservent l'indépendance linéaire.

3. Bases coordonnées, dimension d'un espace vectoriel

3.1. Bases

3.1.1. Définition

Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{B}$ est une base de E si tout vecteur u de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{B}$.
C'est-à-dire $\forall u \in E, \quad \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad$ tel que $\quad u = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$
Les coefficients $x_1, \dots, x_n$ sont appelés coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$

3.1.2. Proposition

♡ Une famille finie est une base si et seulement si elle est libre et génératrice.

3.1.3. Exemples fondamentaux : bases canoniques

- si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ admet comme base les vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ où e_i a ses composantes nulles sauf la i$^{\text{me}}$ composante égale à 1.
- si $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ admet comme base les $\left(E_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ où $E_{i,j}$ est la matrice qui a toutes ses composantes nulles sauf à l'intersection de la i-ième ligne et la j-ième colonne où la composante est égale à 1.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}_n[x]$ admet comme base $(P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n)$ où P_0 est le polynôme constant égal à 1 et $P_i = x^i$ pour tout i entier naturel non nul.

★ *Exercice 9*

- Ecrire explicitement la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et donner les coordonnées de $u = (1; -2; 5)$ dans cette base.
- Ecrire explicitement la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et donner les coordonnées de $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ dans cette base.
- Ecrire explicitement la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ et donner les coordonnées de $P = 2x^2 - 3x + 1$ dans cette base.

3.1.4. Proposition

Les opérations de Gauss transforment une base en une base.

3.2. Dimension d'un espace vectoriel

3.2.1. Théorème-Définition

♡ Si l'espace vectoriel admet une base formée de n vecteurs ($n \in \mathbb{N}^*$), alors toutes les bases ont n vecteurs et n est la dimension de E.

3.2.2. Exemple

$\dim \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = 4$ Par convention, $\dim\{0\} = 0$, de base $\varnothing$.

★ *Exercice 10*

Quelles sont les dimensions des espaces vectoriels $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_2[x]$?

3.3. Cardinal de familles libres et/ou génératrices

3.3.1. Proposition

Soit un espace vectoriel de dimension n.

- toute famille libre a au plus n éléments.
- toute famille génératrice a au moins n éléments.

3.3.2. Méthode pratique

Pour montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel DONT ON CONNAÎT LA DIMENSION, il suffit de montrer DEUX des trois propositions suivantes :

1. Cette famille est libre *(souvent assez facile à montrer)*
2. Cette famille est génératrice
3. Cette famille a pour cardinal la dimension de l'espace vectoriel *(évident)*

★ *Exercice 11*

Montrer que $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

3.4. Dimension de sous-espace vectoriel

3.4.1. Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors tout sous-espace vectoriel est de dimension finie inférieure à n.

3.4.2. Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel tel que $\dim F = \dim E$. Alors $F = E$.

★ *Exercice 12 (incontournable)*
Reprendre les notations et corrections des exercices 2 et 6 et déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels $E_0(A)$ et $E_2(A)$

3.5. Rang d'une famille de vecteurs

3.5.1. Définition

♡ Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E. On appelle rang de $\mathscr{F}$ et on note $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F})$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$.

3.5.2. Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de E.

- $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leq \dim E$ avec égalité si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice de E.
- $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leq \#\mathscr{F}$ avec égalité si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre

★ *Exercice 13*
Déterminer le rang des familles $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ de l'exercice 7 (on s'aidera aussi des résultats de l'ex 8)

3.5.3. Proposition

On ne change pas le rang d'une famille en appliquant une suite finie d'opérations de Gauss.

4. Lien avec les matrices

4.1. Matrice d'un vecteur ou d'une famille de vecteurs dans une base

4.1.1. Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.
♡ On appelle matrice de $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathscr{B}$ la matrice $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est formée, dans l'ordre, des n coordonnées de u_j dans $\mathscr{B}$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_p)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_p) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} u_1 & \dots & u_p \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, soient $u(1;2;3)$ et $v(4,5,6)$. Alors la matrice de la famille (u, v) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

4.1.2. Proposition

La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre si et seulement si les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_p)$ sont linéairement indépendantes.

4.1.3. Théorème

La famille $(u_1,\dots,u_p)$ est une base si et seulement si $n=p$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_p)$ est inversible.

4.2. Matrice de passage

♡ Si $\mathscr{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ est une seconde base de E, sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est appelée matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. On la note $\mathscr{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$

♡ **Remarque** : Une matrice de passage est toujours inversible et $\mathscr{P}^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}=\mathscr{P}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$

★ *Exercice 14 (incontournable)*
Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}'(u_1,u_2,u_3)$ avec $u_1=e_1+e_3$, $u_2=e_2+e_3$ et $u_3=2e_1+e_2$.
Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base et exprimer $\mathscr{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ et $\mathscr{P}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.

On commence par exprimer les vecteurs u_1, u_2 et u_3 grâce à leurs triplets de coordonnées.
Puis on s'inspirera des exercices 8 et 11 et de l'exemple du paragraphe 4.1.1

4.3. Changement de bases

4.3.1. Théorème

Soient $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Soit u un vecteur de E et X (resp. X' la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ (resp $\mathscr{B}'$). Alors $X=PX'$

★ *Exercice 15*
Avec l'exemple précédent, si $u(1;2;3)$ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$, trouver les coordonnées de u dans $\mathscr{B}'$.

4.3.2. Propriétés

$$\mathscr{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}=I_n \qquad \mathscr{P}^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\times\mathscr{P}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}=I_n \qquad \mathscr{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\times\mathscr{P}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}=\mathscr{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}$$