Questions de cours : Espaces vectoriels de dimension finie

Questions de cours :

1. Quelle la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$?
2. Quelle la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[x]$?
3. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
4. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
5. Soit F un sous-espace vectoriel engendré par trois éléments u, v et w. Comment peut-on noter F ?
6. Soit F un sous-espace vectoriel formé de toutes les combinaisons linéaires de u, v et w. Comment peut-on noter F ?
7. Soit F l'ensemble des vecteurs de la forme $au+bv+cw$ avec u, v et w trois vecteurs et a, b et c trois réels. Comment peut-on noter F ?
8. Soit E un espace vectoriel et $F=\left\{au+bv+cw,\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,(u,v,w)\in E^3\right\}$. Comment peut-on noter F ?
9. Soit F un sous-espace vectoriel engendré par trois éléments u, v et w. Comment s'écrivent les éléments de F ?
10. Soit $\mathscr{F}$ une famille qui engendre l'espace vectoriel G. Comment peut-on écrire G ?
11. Quelle est la méthode pour montrer qu'une famille est libre (et donc la première phrase de rédaction que l'on peut donner en exercice) ?
12. Si $\mathscr{F}$ est la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right)$, dire quel est le cardinal de $\mathscr{F}$, le rang de $\mathscr{F}$ et la dimension de Vect($\mathscr{F}$).
13. Quels sont les trois points que vérifient une base d'un espace vectoriel F ?
14. Pour montrer que l'on a une base d'un espace vectoriel F, combien de points de la question précédente a-t-on besoin de montrer ?
15. Quelle est la méthode pour déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel ?
16. De combien de bases peut-on disposer pour un espace vectoriel de dimension finie ?
17. Donner les coordonnées du polynôme $P=4x^3-x+6$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$.
18. Soit $\mathscr{F}$ une famille. Compléter : rg($\mathscr{F}$) $=\dim\ldots$
19. Si P est la matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$ et Q est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$, que peut-on en déduire ?
20. Soient (A,B,C,D) une famille de quatre matrices carrées d'ordre 2 définies par $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&1\\1&3\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}0&-1\\0&-1\end{pmatrix}$. Donner un argument rapide pour justifier que (A,B,C,D) est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
21. Soient (A,B,C,D) une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par les matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&1\\1&3\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}0&-1\\0&-1\end{pmatrix}$. Donner la matrice de passage de la base canonique à cette base .
22. Méthode pratique pour donner la matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$.

Savoir-faire du chapitre ou savoir-faire vus à l'occasion de ce chapitre :

1. $\star$ Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel avec la méthode "en trois points".
2. Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel en l'exprimant en tant que sous-espace vectoriel engendré.
3. Réduire une famille génératrice pour trouver une famille génératrice minimale.
4. Prouver qu'une famille est libre.
5. Prouver qu'une famille est une base d'un espace vectoriel.
6. Trouver une base et la dimension d'un sous-espace vectoriel.
7. $\star$ Déterminer le rang d'une famille de vecteurs.
8. Donner la matrice de passage d'une base à une autre base.
9. Factoriser $AX-\lambda X$ avec A une matrice carrée et X une matrice colonne.
10. Expliciter les coefficients de $A-\lambda I$ connaissant ceux de A.
11. Méthode d'identification des polynômes