Chapitre 1 - Étude des fonctions réelles

1 Comparaisons de fonctions

Dans cette section, les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un point a de I. On pourra également prendre $a = \pm\infty$.

1.1 Négligeabilité

Définition

f et g définies au voisinage de a. On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a s'il existe $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \epsilon(x)g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0.$$

On note alors : $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ ou $f(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}(g(x))$.

Proposition

Si g ne s'annule pas au voisinage de a :

$$f \text{ est } \textbf{négligeable} \text{ devant } g \text{ au voisinage de } a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Exemples : Comparer $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$. Puis $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Propriétés :

- Si $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ et $h(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ alors $\lambda f(x) + \mu h(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$.
- Si $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ et $g(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(h(x))$ alors $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(h(x))$. **(transitivité)**
- Si $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ alors $\frac{1}{g(x)} = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{f(x)}\right)$. **(passage à l'inverse)**

Liens avec les limites :

- $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 0$.
- Si $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
- Si $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$ alors $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \ell$.

Croissances comparées :

- Si $\alpha > \beta > 0$, $x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\alpha)$ et $x^\alpha = \underset{x\to 0}{o}(x^\beta)$.
- Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$, $(\ln(x))^\alpha = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(x^\beta)$ et $(\ln(x))^\alpha = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$.
- Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$, $x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(\mathrm{e}^{\beta x})$.

1.2 Équivalence

Définition

f et g définies au voisinage de a.

$$f \text{ est } \textbf{équivalente} \text{ à } g \text{ au voisinage de } a \Leftrightarrow f(x) - g(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x)).$$

On note alors : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Proposition

Si g ne s'annule pas au voisinage de a :

$$f \text{ est } \textbf{équivalente} \text{ devant } g \text{ au voisinage de } a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple : Comparer $x \mapsto x^3 - 3x + 2$ et $x \mapsto x^3 - 2x^2$.

Propriétés :

- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$. **(réflexivité)**
- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$. **(symétrie)**
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$. **(transitivité)**

Opérations :

- Si $f \sim g$ et $h \sim k$ alors $fh \sim gk$.
- Si $f \sim g$ et $h \sim k$ alors $\frac{f}{h} \sim \frac{g}{k}$.
- Si $n \in \mathbb{N}$ et $f \sim g$ alors $f^n \sim g^n$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \sim g$ alors $f^\alpha \sim g^\alpha$ (avec $f, g > 0$).
- Si $f \sim g$ alors $|f| \sim |g|$.
- **Pas de sommes et de compositions !**

Liens avec les limites :

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si $\lim_{x\to a} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.
- **Si** $\ell \neq 0$, $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.

1.3 Détermination d'équivalents

Équivalents usuels :

- Tout polynôme est équivalent, **au voisinage de** 0, à son monôme de plus bas degré.
- Tout polynôme est équivalent, **au voisinage de** $+\infty$, à son monôme de plus haut degré.
- À connaître : $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}^\star$).

Exemples : Déterminer des équivalents en $\pm\infty$ et en 0 de :

$$f(x) = 4x^5 - 5x^4 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\ln(1+x)}{6x^3 + x - 5}.$$

Méthode : Obtention d'équivalents

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.
- On utilise les règles de produits, quotients, puissances.
- S'il y a des sommes, on factorise par le terme prépondérant.
- Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors : $f(x) - f(x_0) \underset{x\to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$.

Exemples :

- Donner des équivalents aux voisinages de 0 et $+\infty$ de :
$$f(x) = 2e^x + 3\sqrt{x} - x^{100} \quad \text{et} \quad g(x) = 5\ln(x) + 3e^{-x} - x^{100}.$$
- Donner des équivalents simples aux points donnés :
$$f(x) = e^{1/x} - 1 \text{ en } +\infty, -\infty, 0$$
$$g(x) = \ln(1-x) \text{ en } -\infty, 0$$
$$h(x) = \ln(x) \text{ en } 1$$

2 Développements limités

2.1 Définitions

Définition : DL à l'ordre 1

f définie au voisinage de x_0 admet un DL à l'ordre 1 en x_0 s'il existe $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tels que :
$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x - x_0).$$

Définition : DL à l'ordre 2

f définie au voisinage de x_0 admet un DL à l'ordre 2 en x_0 s'il existe $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}((x - x_0)^2).$$

Théorème : Formule de Taylor-Young

Si f est définie au voisinage de x_0 et est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0 alors f admet un DL à l'odre 1 en x_0 donné par :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x - x_0).$$

De même, si f est $\mathcal{C}^2$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) + \underset{x\to x_0}{o}((x - x_0)^2).$$

Proposition : Unicité du DL

On note $f(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}((x - x_0)^2)$.

Si f est $\mathcal{C}^2$ alors $a = f(x_0)$, $b = f'(x_0)$, $c = \frac{1}{2}f''(x_0)$.

Remarques :

- Si $f(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}((x - x_0)^2)$, une équation de la tangente à la courbe de f en x_0 est $y = a + b(x - x_0)$.
- Si $f(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}((x - x_0)^2)$ et $c > 0$, la courbe de f est localement au dessus de sa tangente.

2.2 Méthode

Développements usuels :

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}u^2 + \underset{u\to 0}{o}(u^2), \quad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2),$$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2).$$

Exemples : déterminer des DL à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1-x)$, $\sqrt{1-x}$, e^{x^2}.

2.3 Applications

Recherche d'équivalents et de limites

- Une fonction est équivalente au premier terme **non nul** de son DL.
- On peut additionner les DL !

Exemples : Déterminer les DL à l'ordre 2 en 0 de $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$ et à l'ordre 1 de $\frac{\mathrm{e}^{-2x}-1}{x}$.

Position relative d'une courbe à sa tangente
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

- Calculer le DL à l'ordre 2 en 0 de f.
- En déduire l'équation de la tangente en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

3 Compléments : maths approfondies

3.1 Équivalents de référence

$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

3.2 Développements à l'ordre n

Théorème : Formule de Taylor-Young à l'ordre n

Si $f$est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0) + \cdots \\ &\quad + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}((x-x_0)^n). \end{aligned}$$

Développements usuels :

- $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}(u^n)$
- $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{u^n}{n} + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}(u^n)$
- $\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}(u^n)$
- $\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + \cdots + (-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}(u^{2n+1})$
- $\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!} + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}(u^{2n})$