CHAPITRE 2 - COMPLÉMENTS SUR LES SUITES

1 Comparaisons de suites

1.1 Négligeabilité

Définition

(u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) (au voisinage de $+\infty$) s'il existe une suite (ϵ_n) telle que :

$$u_n = \epsilon_n v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0.$$

On note alors : $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$ ou $u_n \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$.

Proposition

Si $v_n \neq 0$ (à partir d'un certain rang) :

$$(u_n) \text{ est } \textbf{négligeable} \text{ devant } (v_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

1.2 Équivalence

Définition

(u_n) et (v_n) deux suites réelles.

$$(u_n) \text{ est } \textbf{équivalente} \text{ à } (v_n) \Leftrightarrow u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n).$$

On note alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Proposition

Si $v_n \neq 0$ (à partir d'un certain rang) :

$$(u_n) \text{ est } \textbf{équivalente} \text{ devant } (v_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

2 Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

2.1 Point fixe d'une fonction

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit $f : A \to \mathbb{R}$. On dit que $x \in A$ est un point fixe de f si :

$$f(x) = x.$$

Théorème : théorème du point fixe

Soient $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite d'éléments de A vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Si (u_n) converge vers $\ell \in A$ et si f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.

Attention ! Pour les maths appro, c'est hors-programme mais à connaître... et à savoir démontrer !
Exemple : Limites possibles pour (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n$?

2.2 Plan d'étude

Cette méthode n'est pas entièrement générale. L'énoncé peut donner d'autres indications mais c'est un bon point de départ.

Méthode

- On étudie les variations de f.
- On cherche un intervalle I stable par f. On montrera par récurrence que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- On étudie la monotonie de (u_n). Il y a deux cas typiques :
  1. f est croissante sur I. On montre par récurrence que (u_n) est monotone.
  2. f est décroissante sur I. $f \circ f$ est alors croissante et on étudie séparément (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
- Si (u_n) est bien monotone, on utilise alors le théorème de la limite montone pour montrer qu'elle converge (ou éventuellement diverge).
- On utilise le théorème du point fixe pour déterminer la limite le cas échéant.

Exemple : étudier (v_n) définie par $v_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{v_n}$.

2.3 Variante avec IAF

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si ℓ est un point fixe de f et si $|f'(x)| \leqslant k$ avec $k \in [0,1[$, alors on peut utiliser une autre méthode.
Cette méthode sera souvent guidée mais tombe régulièrement dans les sujets Maths I & II.

Méthode

- On applique l'inégalité des accroissements finis (IAF) pour montrer que pour tout $x \in I$, on a : $|f(x) - \ell| \leqslant k|x - \ell|$.
- On applique l'inégalité précédente et on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|$.
- On conclut que $u_n \to \ell$ par encadrement.

Exemple : On considère (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= \frac{1}{5}(3 + u_n^2) \end{cases}.$$

On note $f(x) = \frac{1}{5}(3 + x^2)$.

1. Montrer que $[0,1]$ est stable par f.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{2}{5}$.
3. Étudier l'éventuelle limite de (u_n).

3 Compléments : maths approfondies

3.1 Croissances comparées

Il y a une croissance comparée à connaître en plus. Pour $q \in \mathbb{R}$:

$$q^n = \mathrm{o}(n!).$$

3.2 Démonstration du théorème du point fixe

Soient $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite d'éléments de A vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose que (u_n) converge vers $\ell \in A$ et que f est continue en ℓ. Montrons que $f(\ell) = \ell$.
Comme $u_n \to \ell$ et f est continue en ℓ, on a :

$$f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\ell)$$

De plus, on a $u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, par unicité de la limite, on a bien :

$$\ell = f(\ell).$$