CHAPITRE 3 - COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition

Définition : Espace vectoriel

Soit E un ensemble muni de deux lois :

- une loi **de composition interne** $+ : E \times E \to E$;
- une loi **de composition externe** $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$.

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ssi toutes les conditions suivantes sont vérifiées :

1. **Commutativité de + :** $\forall u, v \in E, u + v = v + u$;
2. **Associativité de + :** $\forall u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$;
3. **Élément neutre de + :** il existe un uniquement élément noté 0_E tel que $\forall u \in E,\ 0_E + u = u + 0_E = u$.
4. **Élements symétriques :** pour tout $u \in E$, il existe un unique élément $v \in E$ tel que : $u + v = v + u = 0_E$. On note $v = -u$.
5. **(Quasi-)associativité de $\cdot$:** $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u$;
6. **Distributivité de $\cdot$ sur $+_E$:** $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E, \lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$;
7. **Distributivité de $\cdot$ sur $+_{\mathbb{R}}$:** $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in E, (\lambda + \mu) \cdot u = (\lambda \cdot u) + (\mu \cdot u)$;
8. **Neutralité de 1 :** $\forall u \in E,\ 1 \cdot u = u$.

Remarque : Cette définition est au programme mais, en pratique, on ne l'utilise pas directement.

1.2 Dimension et espaces de références

Définition : Dimension

On dit que E est de dimension $n \in \mathbb{N}$ s'il existe une bijection de E sur $\mathbb{R}^n$ qui vérifie : $\forall (u, v) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$.

Remarque : en maths appro, ce n'est pas la définition, mais c'est un théorème. Sauriez-vous le redémontrer ?
Exemples : dimensions de $\mathbb{R}^n$? de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$? de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$? de $\mathbb{R}_n[x]$?

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition : Combinaison linéaire

Soient u_1, ..., $u_n \in E$. On appelle combinaisons linéaires de u_1, ..., u_n tout vecteur de la forme :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

où λ_1, ..., λ_n sont des réels.

Définition : Sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \subset E$;
- F est non vide ;
- F est stable par combinaison linéaire.

Méthode

Pour vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E, on vérifie les trois points suivants :

- $F \subset E$;
- $0_E \in F$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in F,\ \lambda \cdot u + v \in F$.

Remarques :

- $\{0_E\}$ et E sont toujours des sous-espaces de E. On les appelle les sous-espaces *triviaux*.
- Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. En pratique, c'est comme cela que l'on vérifie qu'un ensemble est bien un espace vectoriel.

Exemples : Vérifier que les ensembles F suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace E indiqué .

- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + y = 0\}$ avec $E = \mathbb{R}^2$;
- $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = M\}$ avec $E = M_n(\mathbb{R})$;
- $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x],\ \forall t \in \mathbb{R}, P'(t) + tP(t) = 0\}$ avec $E = \mathbb{R}_3[x]$.

2 Familles de vecteurs

2.1 Familles libres et liées

Définition : Famille libre

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est libre si :
$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_1 u_1 + \cdots \lambda_n u_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Remarque : une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite liée.

Proposition

Une famille $\mathcal{F}$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

Exemples : les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?
- $((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$;
- $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$;
- $((1,0,1),(0,1,0),(1,1,1))$.

Propriétés :
- Soit $x \in E$. (x) est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
- Soient $x, y \in E$. (x, y) est libre si et seulement si x et y ne sont pas proportionnels.
- Toute famille contenant le vecteur nul 0_E est liée.
- Toute **sous-famille** d'une famille libre est libre.
- Toute **sur-famille** d'une famille liée est liée.

2.2 Familles génératrices

Définition : Famille génératrice

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ *engendre* E si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$.

Définition : Espace engendré

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs de E. On appelle espace engendré par $\mathcal{F}$ et on note $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ l'ensemble des combinaisons de $\mathcal{F}$.

Remarque : L'espace engendré par $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples :
- Donner une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$? de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$?
- Quel est l'espace engendré par $(1, x, x^2, \dots, x^n)$?

Propriétés :
- Si e_{n+1} est combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_n)$ alors : $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
- Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Application : Déterminer une sous-famille de $\mathcal{F} = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ qui engendre le même espace.

2.3 Bases

Définition : Base

Une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$ est une base de E si et seulement si c'est une famille libre et génératrice de E.

Proposition

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$. $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique n-uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Remarques :
- Les réels x_1, ..., x_n sont appelés les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.
- Pour les maths appros : apprenez à le démontrer.

Exemples :
- bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, de $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}_n[x]$.
- Déterminer les coordonnées de $x^2 - 1$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ ainsi que dans la base $(1, x-1, (x-1)^2)$.

Proposition : théorème de la dimension

Si l'espace vectoriel E admet une base formée de n vecteurs (avec $n \in \mathbb{N}$) alors toutes les bases de E ont exactement n vecteurs.
Dans ce cas, l'espace vectoriel E est de dimension n.

2.4 Cardinal et rang

Propriétés :

- Toute famille libre d'un espace de dimension n a au plus n vecteurs.
- Toute famille génératrice d'un espace de dimension n a au moins n vecteurs.

Proposition

Soit E un ev et F un sev de E. Si $\dim E = n \in \mathbb{N}$ alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Définition : Rang d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. On appelle rang de $\mathcal{F}$ et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Exemple : déterminer le rang de $\mathcal{F} = ((1,2),(0,0),(1,-1),(2,1))$.
Propriétés :

- On a $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \dim E$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ engendre E.
- On a $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leqslant \mathrm{card}(\mathcal{F})$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre.

3 Matrices

3.1 Matrice d'un vecteur et d'une famille

Définition : Matrice d'un vecteur

Soit E un espace de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $x = x_1e_1 + \cdots X_ne_n \in E$ un vecteur de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$.
La matrice de x **dans la base** $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Exemples : Matrices de $(2,1)$ dans la base canonique et dans $((1,1),(-1,1))$.
Remarque : en notant $u_i = a_{i,1}e_1 + \cdots a_{i,n}e_n$, on définit de même :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{p,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

Propriétés :

- La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre si et seulement si les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$ sont linéairement indépendantes.
- La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est une base ssi $n = p$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$ est inversible.

3.2 Matrice de passage

Définition : Matrice de passage

Si $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une seconde base de E, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est appelée **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
On la note généralement $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Exemple : $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = e_1 + e_3$, $u_2 = e_2 + e_3$ et $u_3 = 2e_1 + e_2$.

Proposition : Changement de base

Soit $u \in E$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.

Exemple : Coordonnées de $u(1,2,3)$ dans $\mathcal{B}'$.
Propriétés : $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n$, $\quad \mathcal{P}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, $\quad \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}$.

4 Compléments : maths approfondies

4.1 Espaces de références

Espaces vectoriels de références à connaître :

- L'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[x]$;
- L'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$: $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$;
- L'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^n$;
- L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4.2 Somme directe de deux sev

Définition : Somme de deux sous-espaces vectoriels

On appelle somme de F et de G et on note $F + G$ l'ensemble :

$$F + G = \{x + y,\ x \in F,\ y \in G\}.$$

Exemple : $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) + \mathrm{Vect}(e_3, e_4) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Propriétés :

- $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Si $F \subset H$ et $G \subset H$ alors $F+G \subset H$.
- La concaténation de deux familles génératrices de F et de G forme une famille génératrice de $F+G$.
- Si F et G sont de dimension finie alors $\dim(F+G) \leq \dim F + \dim G$.

Définition : Somme directe

On dit que F et G sont en somme directe si :

$$\forall x \in F, \forall y \in G,\ x+y=0_E \Rightarrow x=y=0_E.$$

Dans ce cas, on note $F \oplus G$ plutôt que $F+G$.

Proposition

Soient E de dimension finie, $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G. Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

1. F et G sont en somme directe ;
2. $F \cap G = \{0_E\}$;
3. la concaténation de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ est une base de $F+G$;
4. $\dim F + \dim G = \dim(F+G)$.

Remarque : la base obtenue par concaténation de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ est appelée base adaptée à la somme directe $F+G$.

Définition : Sous-espaces supplémentaires

Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E si F et G sont en somme directe et si $F \oplus G = E$.

Propriétés :

- F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl} F \cap G & = & \{0_E\}, \\ \dim F + \dim G & = & \dim E. \end{array}\right.$
- Tout sous-espace F d'un esapce E de dimension finie admet un supplémentaire.
- Il n'y a pas unicité du supplémentaire.
- F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'éléments de F et de G.

4.3 Somme directe de n sev

Définition : Somme de n sous-espaces vectoriels

On appelle somme de F_1,...,F_n et on note $\sum_{i=1}^n F_i$ l'ensemble :

$$\sum_{i=1}^n F_i = \{x_1 + \ldots + x_n,\ \forall i \in [\![1,n]\!], x_i \in F_i\}.$$

Propriétés :

- $\sum_{i=1}^n F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Si pour tout i, $F_i \subset H$ alors $\sum_{i=1}^n F_i \subset H$.
- Si tous les F_i sont de dimension finie, alors : $\dim\left(\sum_{i=1}^n F_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \dim F_i$.

Définition : Somme directe

On dit que la somme $\sum F_i$ est directe si :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n,\ x_1 + \ldots + x_n = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0_E.$$

Dans ce cas, on note :

$$\sum_{i=1}^n F_i = \bigoplus_{i=1}^n F_i = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n.$$

Proposition

Si F_1,...,F_n sont de dimension finie et si $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_n$ sont des bases espectives de chacun alors il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- la somme $\sum_{i=1}^n F_i$ est directe ;
- la concaténation des $\mathcal{B}_i$ est une base de $\sum_{i=1}^n F_i$;
- $\dim\left(\sum_{i=1}^n F_i\right) = \sum_{i=1}^n \dim F_i$.

Propriétés :

- Les F_i sont en somme directe si et seulement si tout élément de $\sum_{i=1}^n F_i$ s'écrit de manière unique comme somme d'éléments des F_i.
- Contrairement au cas de 2 sous-espaces vectoriels, il n'y a pas de caractérisation par l'intersection. C'est un problème parallèle à la condition de liberté d'une famille qui se ramène à la colinéarité lorsqu'on a que deux vecteurs.