TD1 - Étude des fonctions réelles

1 Révisions

Exercice 1 - Obtention d'inégalités ⋆

1. Montrer que : $\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x - 1 \leq x \ln x$

Exercice 2 - Deux fonctions classiques ⋆⋆

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Déterminer la parité de chacune de ces fonctions.
2. Déterminer le signe de chacune de ces fonctions sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier le sens de variation de chacune de ces fonctions sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les tangentes en 0 aux courbes de chacune de ces fonctions.
5. Etudier la convexité de ces fonctions.
6. Tracer les représentations graphiques de ces fonctions.

Exercice 3 - Calculs de limites ⋆

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x+1}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$
5. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$
6. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$
7. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}$
8. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(6-x)^7 - 1}{x - 5}$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Exercice 4 - Prolongements $\mathcal{C}^0$ ⋆

Justifier la continuité des fonctions f suivantes sur I et montrer qu'elles admettent un prolongement par continuité sur J :

1. $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} \qquad I = \mathbb{R}^* \quad J = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x} \qquad I =]0; +\infty[\quad J = [0; +\infty[$
3. $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 3}$
   $I =]-3; 1[\cup]1; +\infty[\quad J =]-3; +\infty[$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x+7} - 3} \qquad I = [0; 2[\cup]2; +\infty[\quad J = \mathbb{R}^+$

Exercice 5 - Bijections réciproques ⋆⋆

1. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle à préciser et déterminer l'expression de sa bijection réciproque.
2. Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$. Montrer que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle à préciser et déterminer une expression de sa bijection réciproque.

Exercice 6 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} x\, e^{-1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
3. f est-elle dérivable sur $[0; +\infty[$?

Exercice 7 ⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $f(x) = 1 + x - x \ln x$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$, puis montrer que celle-ci appartient à $[1; 4]$ (On donne $\ln 4 \simeq 1,4$).

Exercice 8 ⋆⋆

Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$. Préciser les points d'inflexion de la courbe.

Exercice 9 ⋆⋆

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n + x - 1$. Montrer qu'il existe un unique réel $x \in]0; 1[$ tel que $f_n(x) = 0$.

Exercice 10 - Obtention d'inégalités ⋆⋆

1. Pour tous réels positifs a et b, Comparer $(a+b)^3$ et $4(a^3+b^3)$
2. Pour tous réels positifs a et b, Comparer $\sqrt[3]{a^2b}$ et $\frac{2a+b}{3}$

Exercice 11 - Calculs de limites ⋆⋆

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+x+1}-2x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2-x+1}-5x$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+1-\ln x}{e^x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$

Exercice 12 - Erreur commise ⋆⋆⋆

Donner le meilleur majorant possible de l'erreur commise en disant que $\sqrt{10001}\simeq 100$
Indication : on utilisera astucieusement l'inégalité des accroissements finis

Exercice 13 ⋆⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. (a) Montrer que f est paire. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).
   (b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution ℓ (on pourra étudier $g : x\mapsto f(x)-x$).
   Justifier que $0\leqslant \ell\leqslant \frac{1}{2}$ (on donne $f(1/2)<1/2$).
   (c) Montrer que, pour tout réel x, $|f'(x)|\leqslant f(x)\leqslant \frac{1}{2}$.
2. On définit la suite (u_n) par $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$.
   (a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\ell|\leqslant \frac{1}{2}|u_n-\ell|$. (On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.)
   (b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\ell|\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.
   (d) Écrire un script Python permettant d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

2 Comparaison de fonctions

Exercice 14 - Équivalents ⋆

Déterminer un équivalent aux points considérés de :

1. e^x-x en $+\infty$ et en $-\infty$
2. $(e^h-1)\big(\ln(1+h)\big)$ en 0
3. $(t^2-t+1)(e^t-\ln t)$ en $+\infty$
4. e^x-2x^2+6 en 0 et en $+\infty$
5. $\dfrac{3x^2-5x+9}{4x^3-5x^2-2}$ en 0 et en $+\infty$
6. $\sqrt{x^2+1}-1$ en 0 et en $+\infty$
7. Archiclassique : $\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ en $+\infty$ avec $a\in\mathbb{R}^\star$
8. $\ln\left(\dfrac{x^4+1}{x^4+3}\right)$ en $+\infty$
9. $\sqrt{x}e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x}$ en $+\infty$
10. $\ln(1+2x)(e^{\sqrt{x}}-1)$ en 0
11. $\dfrac{x+\ln x}{xe^x}$ en 0 et en $+\infty$

Exercice 15 - Un calcul détaillé ⋆

Le but de cet exercice est de détailler la méthode qui permet de calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ avec $f(x)=\left(1+\dfrac{\ln x}{x}\right)^{\ln x}$

1. Vérifier qu'il s'agit d'une forme indéterminée et préciser laquelle.
2. Transformer l'écriture de expression $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ (c'est à dire sans se préoccuper de son ensemble de définition).
3. Préciser la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$ en justifiant.
4. Rappeler un équivalent de $\ln(1+\varepsilon)$ en 0.
5. Bien regarder le lien entre les deux questions précédentes et trouver un équivalent de $\ln\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)$ en $+\infty$
6. Conclure en justifiant correctement chaque étape.

Exercice 16 - Équivalents ⋆⋆

1. Donner un équivalent et calculer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$

(a) $\dfrac{x-1}{x^3+x^2+x+1}$
(b) $\dfrac{3x^2+4-e^{\frac{x}{2}}}{\ln(x)}$
(c) $x^2\ln(x)-x^3+1$
(d) $\dfrac{\ln(2x+1)}{x+1}$
(e) $x-e^{x^2}$
(f) $\dfrac{x+\sqrt{x^2+x+3}}{x+\ln(x)}$

2. Donner un équivalent et calculer la limite des fonctions suivantes en $-\infty$:

(a) $x^{23}-x^{17}$
(b) $\dfrac{x-1}{x^3+x^2+x+1}$
(c) $x+\sqrt{x^2+x+1}$
(d) $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$
(e) $(1+x^2)e^x$
(f) $\sqrt{\dfrac{x^2}{2x^2+x+1}}$

3. Donner un équivalent et calculer les limites des fonctions suivantes en 0 (en 0^+ et 0^- si nécessaire)

(a) $x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$
(b) $x+\ln(x)+\dfrac{1}{x}$
(c) $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$
(d) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$
(e) $\dfrac{1-e^{-x}}{x}$
(f) $\dfrac{4x-2}{x^2-4x}$

3 Exercices d'approfondissement

Exercice 17 - Calcul Non détaillé ⋆⋆

Déterminer un équivalent puis la limite en 0 de :
$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+x^3}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x^2}$

Exercice 18 - Fonction définie par $\int$ ⋆⋆⋆

On note pour tout $x>0$, $\qquad f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-t}}{\sqrt{t+x}}\mathrm{d}t.$

1. Justifier que f est bien définie pour tout $x>0$.
2. (a) Montrer que pour tout réel $x>0$,
$0\ \leq\ \displaystyle\int_0^1\frac{e^{-t}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}t-f(x)\ \leq\ \frac{1}{2x\sqrt{x}}.$
(b) En déduire que, pour tout réel $x>0$,
$0\ \leq \dfrac{1-e^{-1}}{\sqrt{x}}-f(x)\ \leq\ \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}.$
(c) En déduire un équivalent en $+\infty$ de $f(x)$.

4 Maths approfondies

Exercice 19 - EDHEC ECS 2008 ⋆⋆⋆

On se propose dans cet exercice de montre que la série de terme général $u_n=(-1)^n\frac{\sin n}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

1. On désigne par f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$ et par λ un réel strictement positif. Montrer, grâce à une intégration par parties, que :
$\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\mathrm{d}t=0.$
2. (a) On rappelle que : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.
Exprimer pour tout réel t, $\cos\frac{t}{2}\cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)$ et $\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$.
(b) En déduire que :
$$\forall t\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N}^\star,$$
$$\cos\tfrac{t}{2}\textstyle\sum_{k=1}^n(-1)^k\cos(kt)=$$
$$\tfrac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\tfrac{2n+1}{2}t\right)-\cos\tfrac{t}{2}\right)\quad .$$
(c) Montrer alors que : $\forall n\in\mathbb{N}^\star$,
$\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k=(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}.$
3. Utiliser la première question pour conclure que la série de terme général u_n converge et que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n}=-\frac{1}{2}.$$