TD2 - Compléments sur les suites

1 Suites récurrentes

Exercice 1 - Suites usuelles ⋆

Dans chaque cas, calculer le terme général de la suite (u_n) et $\sum_{k=7}^{n} u_k$.

1. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4\,u_n$.
2. $u_2 = 5$ et $\forall n \geq 2,\ u_{n+1} = \frac{2}{5}\,u_n$.
3. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2$.
4. $u_7 = 5$ et $\forall n \geq 7,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3}$.
5. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4\,u_n + 3$.
6. $u_3 = 2$ et $\forall n \geq 3,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\,u_n + \frac{3}{4}$.
7. $u_0 = 2,\ u_1 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\,u_{n+1} - u_n$.
8. $u_3 = 2,\ u_4 = 7$ et $\forall n \geq 3,\ u_{n+2} = 3\,u_{n+1} - 2\,u_n$.

Dans les deux dernières situations, écrire un script python permettant de calculer et afficher le terme de rang $n \geq 2$ de la suite, ne connaissant que sa définition par récurrence.
Bonus : écrire un script python permettant de vérifier, pour $n \geq 2$ que la formule explicite fonctionne.

Exercice 2 - Suites géométriques ⋆

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout $n \geq n$ par : $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n)$.

1. Donner un script python permettant de calculer et imprimer le terme de rang n des suites u_n et v_n lorsque $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.
2. On pose $t_n = u_n - v_n$ et $s_n = u_n + v_n$. Montrer que (t_n) et (s_n) sont des suites géométriques (ou mieux !). En déduire l'expression de t_n (resp. s_n) en fonction de t_0 (resp s_0).
3. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.
4. Déterminer la limite de (u_n) et (v_n).

Exercice 3 - Sommes de termes ⋆

1. Calculer la somme des n premiers entiers pairs et celle des n premiers entiers impairs.
2. Calculer $S_n = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \cdots + (-1)^n 2^n$.

Exercice 4 - Recherche de limites ⋆

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{n^3-3}{2n^2+1}$
2. $u_n = \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$
3. $u_n = \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$
4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
5. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ (utiliser une relation $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$)
6. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ (encadrer u_n)

Exercice 5 - Suite $u_{n+1} = f(u_n)$ ⋆⋆

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

1. Montrer que u_n est bien défini et strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Écrire un script Python permettant de calculer et afficher le terme de rang n de la suite.
3. Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?
4. Étudier le sens de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$.
5. Conclure quand à la convergence de (u_n).

Exercice 6 - Étude avec IAF ⋆⋆

On considère dans cet exercice la fonction f définie pour $x \geq 0$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$

1. Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle appartenant à $]0,1[$, et préciser la valeur de cette racine r_2.
2. Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/2, 1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/2, 1]$.
3. Calculer la dérivée f' de f et prouver l'inégalité suivante pour $1/2 \leq x \leq 1$: $\left|f'(x)\right| \leq \frac{4}{9}$
4. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Prouver l'inégalité suivante et la convergence de la suite (u_n) vers r_2 : $\forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$
5. Donner un script python permettant de calculer et imprimer une valeur approchée à ε près de r_2.

Exercice 7 - $u_{n+1} = f(u_n)$ (f décroissante) ⋆⋆

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$

1. Montrer que u_n est bien défini et strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?
3. Étudier le sens de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$.
4. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de (v_n) et (w_n) (on montrera que $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$)
5. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exercice 8 - Étude classique $u_{n+1} = f(u_n)$ ⋆⋆

On considère la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \frac{x^3+6x}{3x^2+2}$

1. Déterminer le tableau de variations de f.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$. En déduire les points fixes de f.
3. Que dire de la suite dans le cas où $u_0 = 0$? Où $u_0 = -\sqrt{2}$? Où $u_0 = \sqrt{2}$?
4. On suppose dans cette question que $u_0 \in]0; \sqrt{2}[$.
   (a) Montrer que pour tout n, $u_n \in]0; \sqrt{2}[$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).
5. Reprendre l'étude de la question précédente dans le cas où $u_n \in]\sqrt{2}; +\infty[$, puis dans le cas où $u_0 < 0$

Exercice 9 - Variante ⋆⋆⋆

On considère la suite définie par la donnée de $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$

1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
2. Proposer un programme Python permettant de déterminer le k-ième terme de la suite (u_n), l'entier k étant saisi par l'utilisateur.

Exercice 10 - Autre variante ⋆⋆⋆

On considère la suite définie par la donnée de $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{u_n}$

1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
2. Proposer un programme Python permettant de déterminer le k-ième terme de la suite (u_n), l'entier k étant saisi par l'utilisateur.

Exercice 11 - Suite produit ⋆⋆⋆

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{k}{n^2})$.

1. Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 12 - Type $u_{n+1} = f_n(u_n)$ ⋆⋆⋆

Étudier la suite définie par $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$.

Exercice 13 - Type $f(u_n) = n$ ⋆⋆⋆

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$ a une unique solution, que l'on notera u_n. (On pourra étudier $x \mapsto e^x + x$)
2. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ ainsi définie.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq \ln n$ puis que $u_n \geq \ln(n) - 1$ pour n assez grand. (On pourra comparer $f(u_n)$ et $f(\ln(n) - 1)$).
4. En déduire un équivalent simple de (u_n) lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 14 ⋆⋆⋆

On pose :

$$\begin{cases} u_0 &= 2, \\ u_1 &= 0, \\ u_2 &= 7, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} &= 3u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

On note : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout entier naturel n, que vaut le produit MX_n ? En déduire X_n en fonction de M et X_0.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, la première ligne de M^n est :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9}((-2)^n - 6n + 8) & \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 3n + 2) & \frac{1}{9}((-2)^n + 3n - 1) \end{pmatrix}.$$

3. En déduire pour tout n entier naturel, l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 15 - Type $f_n(u_n) = 0$ ⋆⋆⋆

On note, pour tout $n \geq 1$, a_n la solution de l'équation $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$

1. Montrer que a_n est bien défini pour tout n. (On pourra introduire $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$ et étudier son sens de variations sur $[0, 1]$.)
2. Calculer a_0 et a_1.
3. Montrer que la suite (a_n) est monotone. (On pourra comparer $P_{n+1}(a_n)$ et $P_{n+1}(a_{n+1})$)
4. Montrer que la suite (a_n) est convergente.
5. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $0 < a_n \leq a_2 < 1$.
6. En déduire la limite de la suite (a_n).

2 Limites

Exercice 16 ⋆

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{1}{2n!}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n > 0$.
2. En déduire que (u_n) est convergente.

Exercice 17 ⋆

Déterminer les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^3 - 2n + 1}}, \quad v_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \text{ avec } 0 \leq a < b,$$

$$w_n = \frac{n^2(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Exercice 18 ⋆⋆

Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$ de $\binom{n}{k}$.

Exercice 19 ⋆⋆

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}.$$

1. Montrer que pour tout entier n, $1 \leq u_n \leq 2$.
2. En déduire que u_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

3 Comparaison de suites

Exercice 20 - Vrai ou Faux ? ⋆

1. $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$.
2. $n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 + n$.
3. $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(1000n)$.
4. $e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n+\frac{1}{100000000}}$.
5. $e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{2n}$.
6. $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$.

Exercice 21 - Équivalents et limites ⋆

Déterminer un équivalent et la limite de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = -2n^2 + 7n + 3$.
2. $u_n = n - \frac{3}{n^5}$.
3. $u_n = \frac{3n^2+2n-5}{-4n^2+3n-8}$.
4. $u_n = (1.1)^n - n^{92} + e^{-n}$.
5. $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sqrt{n}$.
6. $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \sqrt{n}$.
7. $u_n = \frac{3n^2+2^n-5^n}{\ln(n)-4n^2+3^n-8}$.
8. $u_n = \sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}$.
9. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$.
10. $u_n = n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$.

Exercice 22 - Par encadrement ⋆⋆

1. Soit (u_n) une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \leqslant u_n \leqslant n^2 + n + 1$
   Déterminer la limite et un équivalent de u_n.
2. Soit (v_n) une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}$
   Déterminer la limite de $(nv_n)_n$, en déduire un équivalent de v_n et sa limite.

Exercice 23 - Suite implicite ⋆⋆

On note (E_n) l'équation $\qquad (E_n) : \frac{x^3}{x^2+1} = n$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E_n) possède une unique solution notée x_n, sur $\mathbb{R}$.
   Donner la valeur de u_0.
2. Quelle est la monotonie de la suite (x_n) ?
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\quad n \leqslant x_n \leqslant n+1$
4. En déduire la limite de la suite x_n et donner un équivalent.

Exercice 24 - Recherche de limites ⋆⋆

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes (on pourra parfois - pas toujours - penser aux équivalents) :

1. $u_n = \frac{n^3 - \ln(n)}{e^{2n}+1}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$
3. $u_n = \frac{e^n - 3^n}{e^n + n!}$
4. $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn}$ avec $(a,b) \in]0;+\infty[^2$
5. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$
   (indic° : utiliser une relation du type $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$)
6. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ (indic° : une somme de n termes est plus grande que n fois le plus petit terme et plus petite que n fois le plus grand)

Exercice 25 - Recherche d'équivalents ⋆⋆

Donner un équivalent pour chacune des suites :

1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $u_n = \ln\left(2 - e^{-\frac{1}{n^2}}\right)$
4. $u_n = \ln(n+1) - \ln n$

Exercice 26 ⋆⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Prouver que f est une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, montrer que l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution que l'on notera x_n.
   (b) Calculer x_1. Étudier la monotonie et la convergence de (x_n).
3. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, comparer $f(n)$ et n. En déduire que $x_n \leq n$.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, $n - \ln n \leq x_n$.
   (c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}$.

Exercice 27 ⋆⋆⋆

Soit (u_n) une suite à termes positifs vérifiant que : $u_n = o_{n\to+\infty}(\sqrt{n})$. On pose alors :

$$v_n = \left(1 + \frac{u_n}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-u_n}.$$

Déterminer un équivalent de $\ln(v_n)$ puis en déduire la limite de (v_n).

Exercice 28 ⋆⋆⋆

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k! \underset{+\infty}{\sim} n!$

Exercice 29 - Extrait d'ESSEC 1990 ⋆⋆

Soit (u_n) une suite à valeurs positives vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{2(2n+1)}{\pi} \leq u_n^2 \leq \frac{(2n+1)^2}{n\pi}$
Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 30 - HEC 2000 ⋆⋆⋆

1. On note $(h_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geq 1$
   (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$
   (b) En déduire les inégalités $\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)$.
   (c) Déterminer un équivalent simple de h_n.
2. On note $(h_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $k_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour $n \geq 1$
   (a) Montrer que $\forall k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
   (b) En déduire la majoration $k_n \leq 2$.
   (c) Déterminer un équivalent simple de $h_n - k_n$.

4 Maths approfondies

Exercice 31 ⋆⋆

Déterminer les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{2^n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}, \quad v_n = \frac{n \sin n}{1+n^2}, \quad w_n = \sqrt[n]{n},$$

$$x_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}, \quad y_n = n^2\left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1}\right),$$

$$z_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad t_n = \frac{3n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n^2+2} + \ln(n)}.$$

Exercice 32 ⋆⋆⋆

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$u_n = \exp\left(\frac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1, \quad v_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^3 - n}$$

$$w_n = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2^n}\right)\right).$$