DS1 - Révisions Maths Appliquées

Samedi 08/09/2024 - 4h

Calculatrice interdite

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.

Exercice 1 - EDHEC ECE 2008 (Exercice 1 adapté)

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + nx.$$

On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 5 cm.

1. (a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.
   (b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.
   (b) Déterminer $\lim_{x \to +\infty}(f_n(x) - nx)$ et $\lim_{x \to -\infty}(f_n(x) - nx - 1)$.
   (c) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n de (C_n).
   (d) Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en A_1, puis tracer sur un même dessin la droite (T_1) ainsi que l'allure de la courbe (C_1).
3. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.
   (b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (d) En revenant à la définition de u_n, calculer l'éventuelle limite de (nu_n).
   (e) En déduire : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.

Exercice 2 - ECRICOME ECE 2008 (Extrait de l'exercice 3)

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude de deux jeux présents dans une fête foraine.

Partie I - Premier jeu.

Pour ce premier jeu de hasard, la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité $\frac{1}{10}$, perdue avec la probabilité $\frac{9}{10}$.

Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes. Une personne décide de jouer N parties ($N \geqslant 2$). On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. Donner la loi de X_N ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable.
2. Exprimer Y_N en fonction de X_N. En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de Y_N.
3. La personne décide de jouer 60 parties. On admet que l'on peut approcher X_{60} par une loi de Poisson.
   (a) Quel paramètre faut-il choisir pour la loi de Poisson afin que l'espérance corresponde bien à celle de X_{60} ?
   (b) À l'issue des 60 parties, quelle est la probabilité que le joueur perde moins de 50 euros ?

On calculera cette probabilité à l'aide de l'annexe.

Partie II - Deuxième jeu.
Dans ce second jeu, le participant lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N avec $N \geqslant 2$. On suppose que les différents lancers de boules sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule quelconque tombe dans une case donnée est $\frac{1}{N}$. Une case peut contenir plusieurs boules.
Le gain étant fonction du nombre de cases atteintes, on étudie la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides à l'issue des n lancers.

4. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n.
5. Donner les lois de T_1 et T_2.
6. Déterminer, lorsque $n \geqslant 2$, la probabilité des événements $[T_n = 1]$, $[T_n = 2]$ et $[T_n = n]$.

Pour la dernière probabilité, on distinguera deux cas $n > N$ et $n \leqslant N$.

7. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier l'égalité (I) suivante, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$:
$$(I) \quad P([T_{n+1} = k]) = \frac{k}{N} P([T_n = k]) + \frac{N-k+1}{N} P([T_n = k-1]).$$
8. Afin de calculer l'espérance $E(T_n)$ de la variable T_n, on considère la fonction polynomiale G_n définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P([T_n = k]) x^k.$$
   (a) Quelle est la valeur de $G_n(1)$?
   (b) Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G_n'(1)$.
   (c) En utilisant la relation (I), montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2) G_n'(x) + x G_n(x).$$
   (d) En dérivant l'expression précédente, en déduire que :
$$E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(T_n) + 1.$$
   (e) Prouver enfin que l'espérance de la variable T_n est donnée par :
$$E(T_n) = N \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

Exercice 3 - EDHEC ECE 2019 (Exerice 1 adapté)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1. (a) Déterminer $(A - I)^2$.
   (b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.
2. On pose $A = N + I$.
   (a) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :
$$A^n = I + nN.$$
   En déduire l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et de A.
   (b) Vérifier que cette dernière expression est aussi valable pour $n = -1$.

3. On pose $u_1 = (f - \mathrm{Id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
   (a) Déterminer les coordonnées de u_1 et u_2 dans la base canonique.
   (b) En déduire que (u_1, u_2) est une famille libre.
   (c) Vérifier que (u_1, u_2, e_1) est libre. En déduire que (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.
4. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Grâce à la méthode de Gauss-Jordan, justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Calculer PTP^{-1}. Que constate-t-on ?
5. On cherche à déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices M qui vérifient que :
$$AM = MA.$$
   (a) Montrer que pour tout $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, on a :
$$AM = MA \Leftrightarrow T(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)T.$$
   (b) Vérifier que l'ensemble des matrices qui commutent avec T sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
   (c) Conclure.

Problème 4 - EDHEC ECE 2018 (Problème adapté)

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie I - Étude de f.

1. (a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.
   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).
2. (a) Montrer que f est impaire.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. (a) Déterminer les réels a et b tels que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}.$$
   (b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :
$$f(x) = x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$
4. **Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.**
   (a) **On admet** que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.
   Calculer alors la limite de $\dfrac{f(x)}{x\ln(1+x^2)}$ lorsque x est au voisinage de $+\infty$.

(b) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$. Calculer alors la limite :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x\ln(x)}.$$

En déduire un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

(c) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

5. **Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.**

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est-à-dire :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \mathrm{o}(x^3).$$

(b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

(c) En déduire alors un équivalent au voisinage de 0. (on trouve $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}$)

6. Une valeur approchée de $f(1)$ est donnée par :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

Écrire une fonction `Python` qui prend en paramètre le nombre n et renvoie la valeur approchée de $f(1)$ avec le calcul précédent.

Partie II - Étude d'une suite.

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n \mathrm{d}t$.

7. (a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?

(b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.

8. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

9. (a) Établir l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n.$$

(b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

10. (a) Montrer que :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}.$$

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t$.

(c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$

(d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$

Annexe : Table de Poisson.

Probabilités cumulées $\sum_{i=0}^{k} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

k	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$
0	$0,0498$	$0,0183$	$0,0067$	$0,0025$	$0,0009$
1	$0,1991$	$0,0916$	$0,0404$	$0,0174$	$0,0073$
2	$0,4232$	$0,2381$	$0,1247$	$0,0620$	$0,0296$
3	$0,6472$	$0,4335$	$0,2650$	$0,1512$	$0,0818$
4	$0,8153$	$0,6288$	$0,4405$	$0,2851$	$0,1730$
5	$0,9161$	$0,7851$	$0,6160$	$0,4457$	$0,3007$
6	$0,9665$	$0,8893$	$0,7622$	$0,6063$	$0,4497$
7	$0,9881$	$0,9489$	$0,8666$	$0,7440$	$0,5987$
8	$0,9962$	$0,9786$	$0,9319$	$0,8472$	$0,7291$
9	$0,9989$	$0,9919$	$0,9682$	$0,9161$	$0,8305$
10	$0,9997$	$0,9972$	$0,9863$	$0,9574$	$0,9015$
11	$0,9999$	$0,9991$	$0,9945$	$0,9799$	$0,9467$
12	$1,0000$	$0,9997$	$0,9980$	$0,9912$	$0,9730$
13		$0,9999$	$0,9993$	$0,9964$	$0,9872$
14		$1,0000$	$0,9998$	$0,9986$	$0,9943$
15			$0,9999$	$0,9995$	$0,9976$
16			$1,0000$	$0,9998$	$0,9990$
17				$0,9999$	$0,9996$
18				$1,0000$	$0,9999$
19					$1,0000$
20					