DS 1 - Révisions Maths Approfondies

Samedi 07/09/2024 - 4h

Calculatrice interdite

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.

Exercice 1 - ESCP ECS 2019

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) \end{cases}$$

1. Vérifier que $u_1 = \frac{1}{2}$ et $v_1 = \frac{3}{4}$. Calculer u_2 et v_2.
2. Compléter le script Python qui permet de déterminer u_n et v_n pour une valeur de n donnée en paramètre :

```python
def valeurs(n):
    u = ........
    v = ........
    for k in range(n):
        u = ........
        v = ........
    return u,v
```

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}w_n$.
   (b) En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
   (c) i. Montrer que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$
   ii. En déduire à l'aide de la question 3a l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
   iii. Vérifier que l'expression précédente reste valide pour $n = 0$.
   (d) Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner sa limite.
   (e) Déterminer l'epxression de v_n en fonction de n et donner la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) Justifier que l'unique réel α pour lequel la série de terme général $t_n = \frac{9}{8}(\alpha - u_n)$, avec $n \in \mathbb{N}$, est convergente est $\alpha = \frac{2}{3}$.

   Dans les questions suivantes, on choisit $\alpha = \frac{2}{3}$.

   (b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_n > 0$ et établir l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = 1$.
5. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = n]) = t_n$.
   (a) On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de la variable Y.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Exercice 2 - Ecricome ECS 2017

On définit sur l'intervalle $]0,1]$ les deux fonctions $f : x \mapsto x\ln(x)$ et $g : x \mapsto x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$.

1. (a) Les fonctions f et g admettent-elles des limites en 0 ?
   (b) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g sur $]0,1]$.
   (c) Justifier que l'intégrale $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ est convergente. On notera I sa valeur.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (t\ln(t))^n \mathrm{d}t,$$
et :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (c) Calculer u_0 et u_1.
   (d) À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$
   (e) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
   (f) Écrire une fonction `Python` de signature `somme(n)` qui prend comme paramètre d'entrée un entier naturel n et qui produit en sortie la valeur de S_n.
3. (a) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle, montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right]$ et tout entier naturel n :
$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}.$$
   (b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |I - S_n| \leq \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}.$$
   (c) Montrer que :
$$I = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}.$$
   (d) Écrire une fonction `Python` de signature `estimation(eps)` qui prend comme paramètre d'entrée un réel flottant strictement positif ε et qui produit en sortie une valeur approchée de I à ε près.

Exercice 3 - EDHEC ECE 2019 (adapté)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1. (a) Déterminer $(A-I)^2$.
   (b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.
2. On pose $A = N + I$.
   (a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et de A.

   (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

3. On pose $u_1 = (f - \mathrm{Id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
   (a) Montrer que le rang de $f - \mathrm{Id}$ est égal à 1.
   (b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
4. (a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.
5. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.
6. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i, j) de $[\![1, 3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.
   (a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.
   (b) Soit N une matrice quelconque de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :
   $$NA = AN \Leftrightarrow (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP).$$
   (c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$.

Problème 4 - EM Lyon ECS 2007 (extrait)

On considère l'application :

$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie I - Étude de l'application f

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. On considère l'application :
   $$A : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$.
   (b) Montrer que f' admet $-\frac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.
   (c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et préciser $f'(0)$.
   (d) Dresser le tableau de variation de A. En déduire que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.
   (e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On considère l'application :
   $$B : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto B(x) = -\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x).$$
   (a) Montrer que f est deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$, et que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}$.
   (b) Dresser le tableau de variation de B.
   (c) En déduire que f est convexe sur $]0, +\infty[$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II - Un développement en série

1. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$, et tout $t \in [0,1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$

où on a noté $J_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \mathrm{d}t$.

3. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$: $|J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}$.
4. En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Partie III - Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

1. Montrer en utilisant le résultat de II.3, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.
3. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} & = & \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} & = & \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}. \end{array} \right.$$

4. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer : $\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.