Correction DS1 - Révisions Maths Appliquées

Exercice 1 - EDHEC ECE 2008 (Exercice 1 adapté)

1. (a) Par opérations sur les fonctions usuelles, f_n est $\mathcal{C}^2$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{f_n'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + n}$$

et :

$$\boxed{f_n''(x) = -\frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}.}$$

(b) On en déduit que $f_n''(x)$ est du signe de $(e^x - 1)$. On en déduit le tableau de variation suivant pour f_n' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n''(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$	$\searrow$		$-\frac{1}{4}+n$		$\nearrow$

Comme $n \in \mathbb{N}^\star$, on a pour tout x, $f_n'(x) \geqslant \frac{3}{4} > 0$.

Donc $\boxed{f_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

2. (a) Quand x tend vers $-\infty$, on a $\lim_{n\to-\infty} e^x = 0$ et donc :

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1.$$

Et donc :

$$\boxed{f_n(x) = \underbrace{\frac{1}{1+e^x}}_{\xrightarrow[n\to-\infty]{} 1} + \underbrace{nx}_{\xrightarrow[n\to-\infty]{} -\infty} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty.}$$

De même, on calcule :

$$\boxed{f_n(x) = \underbrace{\frac{1}{1+e^x}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{nx}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.}$$

(b) On a :

$$\boxed{f_n(x) - nx = \underbrace{\frac{1}{1+e^x}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{nx - nx}_{=0} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

et :

$$\boxed{f_n(x) - nx - 1 = \underbrace{\frac{1}{1+e^x}}_{\xrightarrow[n\to-\infty]{} 1} + \underbrace{nx - nx - 1}_{=-1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0.}$$

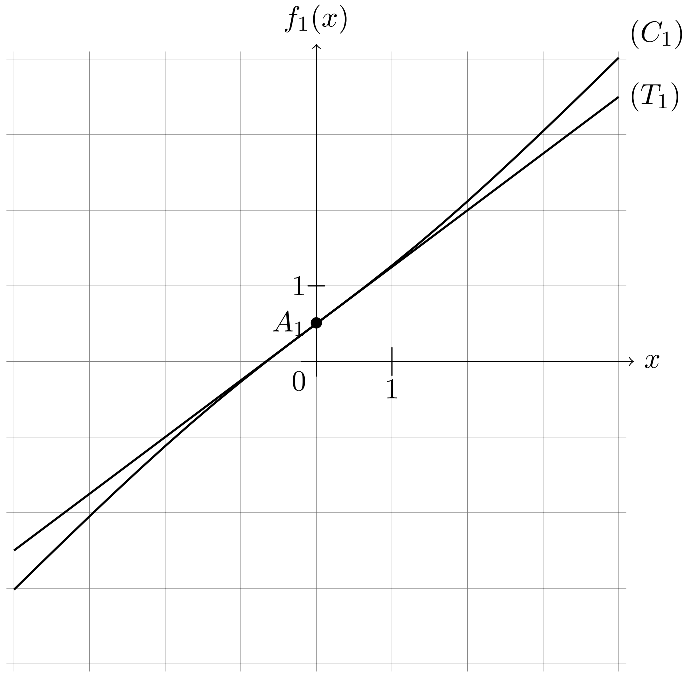
Remarque : La fonction f_n se rapproche donc de la droite (D_n) en $+\infty$: (D_n) est une asymptote (dite oblique) à la courbe en $+\infty$. De même (D_n') est une asymptote oblique à la courbe de f_n en $-\infty$.

(c) Comme f_n'' ne change de signe que en 0, l'unique point d'inflexion de (C_n) a pour abscisse 0 et pour ordonnée $f_n(0) = \frac{1}{2}$.

(d) L'équation de la tangente (T_1) à (C_1) en A_1 a pour équation :

$$\boxed{y = \underbrace{f_n(0) + f_n'(0)(x-0)}_{=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x}.}$$

On peut donc faire le tracé :



3. (a) f_n est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et avec :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

D'après le théorème de la bijection, f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi 0 a un unique antécédent par f_n et $\boxed{f_n(x) = 0 \text{ a bien une unique solution sur } \mathbb{R}.}$

(b) On a :

$$f_n(0) = \frac{1}{2} > 0 = f_n(u_n).$$

Comme f_n est strictement croissante, on a donc $u_n < 0$ (sinon, on aurait par croissance, $f_n(u_n) \geqslant f_n(0)$). De même :

$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}} + n \times \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}} - 1.$$

Comme $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} > 0$, on a $1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} > 1$ et donc $\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}} < 1$. Et donc :

$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right) < 0 = f_n(u_n).$$

Ainsi, par stricte croissance de f_n, on a :

$$\boxed{-\frac{1}{n} < u_n < 0.}$$

(c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\underbrace{-\frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} < u_n < 0.$$

Par encadrement (théorème des gendarmes), $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0.}$

(d) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{u_n}} + nu_n = 0.$$

Donc :

$$\boxed{nu_n = -\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\overset{\to 0}{u_n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}.}$$

(e) On a donc :

$$\frac{u_n}{-\frac{1}{2n}} = \frac{nu_n}{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Donc :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.}$$

Exercice 2 - ECRICOME ECE 2008 (Extrait de l'exercice 3)

Partie I - Premier jeu.

1. X_N compte le nombre de succès dans N expériences de Bernoulli indépendantes et répétées "gagner une partie" de probabilité $\frac{1}{10}$.
   Ainsi $\boxed{X_N \text{ suit une loi binomiale } \mathcal{B}(N, \frac{1}{10}).}$
   Ainsi :
   $$\boxed{E(X_N) = \frac{N}{10}} \quad \text{et} \quad \boxed{V(X_N) = N \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{9N}{100}.}$$
2. On a $Y_N = N \times (-1) + X_N \times 3$ car il faut 1 euro pour participer à chaque partie et lorsqu'on gagne, on remporte 3 euros. Donc :
   $$\boxed{Y_N = 3X_N - N,} \quad \boxed{E(Y_N) = \frac{3N}{10} - N = -\frac{7N}{10}} \quad \text{et} \quad \boxed{V(Y_N) = V(3X_N - N) = 3^2 V(X_N) = \frac{81N}{100}.}$$
3. (a) Notons λ le paramètre de la loi de Poisson. L'espérance de la loi de Poisson correspondante est également λ.
   Il faut donc choisir : $\boxed{\lambda = E(X_{60}) = \frac{60}{10} = 6.}$

   (b) On cherche à calculer $\mathbb{P}(Y_{60} \geqslant -50)$. On a :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{60} \geqslant -50) &= \mathbb{P}(3X_{60} - 60 \geqslant -50)\\ &= \mathbb{P}(3X_{60} \geqslant 10)\\ &= \mathbb{P}(X_{60} \geqslant \frac{10}{3})\\ &= 1 - \mathbb{P}(X_{60} < \frac{10}{3}).\end{aligned}$$
   Comme X_{60} prend des valeurs entières (positives), on a :
   $$\left[X_{60} < \frac{10}{3}\right] = \bigcup_{k=0}^{3} [X_{60} = k]$$
   où l'union est disjointe. On a ainsi :
   $$\mathbb{P}(Y_{60} \geqslant -50) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(X_{60} = k) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \mathrm{e}^{-6}\frac{6^k}{k!}.$$
   D'après la table en annexe, cela donne environ :
   $$\boxed{\mathbb{P}(Y_{60} \geqslant -50) \simeq 1 - 0,1512 \simeq 0,8488.}$$

Partie II - Deuxième jeu.

4. Commençons par noter que T_n prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
   Au minimum, il y aura toujours une case atteinte. Ainsi $T_n \geqslant 1$.
   Si $N \geqslant n$, au maximum, chaque boule tombe dans une case différentes. Dans ce cas $T_n \leqslant n$.
   Si $N < n$, au maximum, les boules remplissent toutes les cases. Dans ce cas, $T_n \leqslant N$.
   Dans tous les cas, on a $T_n(\Omega) \subset [\![1, \min(n, N)]\!]$ et comme les valeurs intermédiaires sont possibles :
   $$\boxed{T_n(\Omega) = [\![1, \min(n, N)]\!].}$$

5. Si on lance une unique boule, elle atterit dans une unique case et $\boxed{T_1 = 1.}$ C'est une variable certaine ($\mathbb{P}(T_1 = 1) = 1$).
   Considérons le cas où on lance deux boules. La première boule atterit dans une case. Puis lorsqu'on lance la seconde boule, il y a deux possibilités :
   - Elle atterit avec une probabilité $\frac{1}{N}$ dans la case occupée par la première boule. Dans ce cas T_2 prend la valeur 1.
   - Elle atterit avec une probabilité $\frac{N-1}{N}$ dans une autre case. Dans ce cas T_2 prend la valeur 2.

   La loi de T_2 est donc donnée par :
   $$\boxed{\mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T_2 = 2) = \frac{N-1}{N}.}$$

6. Traitons chaque cas séparemment :
   - $[T_n = 1]$: posons $A_{i,j}$ l'événement « la boule i tombe dans la case j. »
     Ainsi l'événement B_j : « toutes les boules tombent dans la case j » peut s'écrire :
     $$B_j = A_{1,j} \cap A_{2,j} \cap \cdots \cap A_{n,j}.$$
     Et l'événement $[T_n = 1]$ peut s'écrire :
     $$[T_n = 1] = \bigcup_{j=1}^{N} B_j$$
     où l'union est disjointe.
     Ainsi :
     $$\mathbb{P}(T_n = 1) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(B_j).$$
     Comme les lancers sont indépendants, les événements $(A_{1,j}, A_{2,j}, \ldots, A_{n,j})$ sont mutuellement indépendants. Donc :
     $$\mathbb{P}(B_j) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_{i,j}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{N} = \frac{1}{N^n}.$$
     D'où :
     $$\boxed{\mathbb{P}(T_n = 1) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N^n} = N \times \frac{1}{N^n} = \frac{1}{N^{n-1}}.}$$

Remarque : *pour un premier DS et sans avoir fait de révisions sur ces chapitres, je n'attends pas forcément quelque chose d'aussi développé. De plus, nous verrons des moyens de rédiger cela de manière plus compacte plus tard.*
C'est plutôt pour moi l'occasion de montrer comment rédiger plus rigoureusement un raisonnement en probabilités.

- $[T_n = 2]$: on pourrait reprendre une méthode similaire au cas $[T_n = 1]$ mais cela devient vite lourd. On va procéder par dénombrement. Il y a $\binom{N}{2}$ choix de deux cases de destination.
  Une fois ce choix fixer la probabilité que chacune des n boules tombent dans l'une des deux cases est :
  $$\left(\frac{2}{N}\right)^n$$
  La probabilité que ces n boules tombent toutes dans une seule de ces deux cases est :
  $$2 \times \left(\frac{1}{N}\right)^n.$$
  Donc la probabilité que les n boules tombent dans les deux cases et que les deux cases sont bien occupées est :
  $$\left(\frac{2}{N}\right)^n - 2 \times \left(\frac{1}{N}\right)^n = \frac{2^n - 2}{N^n}.$$
  Ainsi :
  $$\boxed{P(T_n = 2) = \binom{N}{2} \frac{2^n - 2}{N^n} = \frac{(N-1)(2^{n-1} - 1)}{N^{n-1}}.}$$
- $[T_n = n]$ si $n > N$: c'est tout simplement impossible. Il n'y a pas assez de cases. Donc :
  $$\boxed{\mathbb{P}(T_n = n) = 0.}$$
- $[T_n = n]$ si $n \leqslant N$: notons C_i l'événement « la boule i tombe sur une case différentes de toutes les boules précédents ». On a :
  $$[T_n = n] = C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap \cdots \cap C_n.$$
  La formule des probabilités composées donne :
  $$\mathbb{P}(T_n = n) = \mathbb{P}(C_2)\mathbb{P}_{C_2}(C_3) \cdots \mathbb{P}_{C_2 \cap C_3 \cap \cdots \cap C_{n-1}}(C_n) = \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N} \times \cdots \times \frac{N-(n-1)}{N}.$$
  D'où en simplifiant :
  $$\boxed{\mathbb{P}(T_n = n) = \frac{N!}{(N-n)!N^n}.}$$

7. Notons D l'événement « la $(n+1)^{\text{ème}}$ boule lancée tombe dans une case différentes de toutes les boules précédentes ».
   $(D, \overline{D})$ est un système complet d'événements. On a donc d'après la formule des probabilités totales :
   $$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \mathbb{P}([T_{n+1} = k] \cap D) + \mathbb{P}([T_{n+1} = k] \cap \overline{D}).$$
   Remarquons alors que : $[T_{n+1} = k] \cap D = [T_n = k-1] \cap D$, c'est-à-dire que si la dernière boule tombe dans une nouvelle case alors $T_{n+1} = T_n + 1$.
   De même : $[T_{n+1} = k] \cap \overline{D} = [T_n = k] \cap D$. On en déduit :
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{n+1} = k) &= \mathbb{P}([T_n = k-1] \cap D) + \mathbb{P}([T_n = k] \cap \overline{D}) \\ &= \mathbb{P}(T_n = k-1)\mathbb{P}_{[T_n = k-1]}(D) + \mathbb{P}(T_n = k)\mathbb{P}_{[T_n = k]}(\overline{D}). \end{aligned}$$
   On a $\mathbb{P}_{[T_n = k-1]}(D) = \frac{N-(k-1)}{N}$ car il reste $N-(k-1)$ cases libres si $T_n = k-1$. De même $\mathbb{P}_{[T_n = k]}(\overline{D}) = \frac{k}{N}$ car il y a k cases possibles si on ne veut pas en occuper une de plus.
   D'où :
   $$\boxed{P([T_{n+1} = k]) = \frac{k}{N} P([T_n = k]) + \frac{N-k+1}{N} P([T_n = k-1]).}$$

8. (a) On a :

$$G_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = k) \times 1^k = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = k).$$

Si $n \leqslant N$, alors on somme sur toutes les possibilités et :

$$\boxed{G_n(1) = 1.}$$

Si $n > N$, alors $\mathbb{P}(T_n = k) = 0$ pour $k > N$ et on a :

$$\boxed{G_n(1) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(T_n = k) = 1.}$$

(b) G_n est dérivable comme fonction polynomiale. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$G_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = k) k x^{k-1}.$$

Donc :

$$G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(T_n = k).$$

On peut refaire la disjonction de cas, mais la conclusion est la même :

$$\boxed{G_n'(1) = E(T_n).}$$

(c) Commençons par remarquer que la formule (I) reste valable pour $k = n+1$ puisque $P(T_n = n+1) = 0$. Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} P([T_{n+1} = k])x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k}{N} P([T_n = k]) + \frac{N-k+1}{N} P([T_n = k-1]) \right) x^k \text{ (d'après } (I)) \\
&= \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} P([T_n = k]) k x^k}_{\text{car } P([T_n = n+1]) = 0} + \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{k=2}^{n+1} (N-k+1) P([T_n = k-1]) x^k}_{\text{car } P([T_n = 0]) = 0} \\
&= \frac{x}{N} G_n'(x) + \frac{1}{N} \sum_{k'=1}^{n} (N-k') P(T_n = k') x^{k'+1} \text{ (on pose } k' = k-1) \\
&= \frac{x}{N} G_n'(x) + x G_n(x) - \frac{x^2}{N} G_n'(x) \\
&= \boxed{\frac{1}{N}(x - x^2) G_n'(x) + x G_n(x).}
\end{aligned}$$

(d) Les membres de gauche et de droite dont dérivables par opérations usuelles. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G_{n+1}'(x) = \frac{1}{N}(1-2x) G_n'(x) + \frac{1}{N}(x - x^2) G_n''(x) + G_n(x) + x G_n'(x).$$

En évaluant en 1, on trouve :

$$G_{n+1}'(1) = -\frac{1}{N} G_n'(1) + \frac{1}{N} \times 0 \times G_n''(1) + G_n(1) + 1 \times G_n'(1).$$

Donc :

$$\boxed{E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(T_n) + 1.}$$

(e) La suite $(E(T_n))$ est une suite arithmético-géométrique. Par simplicité de notation, notons-la (u_n). Commençons par résoudre :

$$\begin{aligned} & \alpha = \left(1-\frac{1}{N}\right)\alpha+1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{N}\alpha = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \alpha = N. \end{aligned}$$

On pose alors $v_n = u_n - N$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - N \\ &= \left(1-\frac{1}{N}\right)u_n + 1 - N \\ &= \left(1-\frac{1}{N}\right)(v_n+N) + 1 - N \\ &= \left(1-\frac{1}{N}\right)v_n. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ v_n = v_1\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1} = (u_1-N)\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1} = (1-N)\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}.$$

Puis :

$$\boxed{E(T_n) = u_n = v_n + N = (1-N)\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1} + N = N\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right].}$$

Exercice 3 - EDHEC ECE 2019 (Exerice 1 adapté)

1. (a) On a :

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puis :

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) On a :

$$(A-I)^2 = (A-I)(A-I) = A^2 - A - A + I = A^2 - 2A + I.$$

Donc comme $(A-I)^2 = 0$, on a :

$$A(-A+2I) = I.$$

Et de même, $(-A+2I)A = I$. Donc A est inversible et :

$$\boxed{A^{-1} = -A + 2I.}$$

2. (a) Travaillons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
   - **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $A^0 = I$ et $I + 0 \times N = I$. Donc on a bien $A^n = I + nN$ si $n = 0$.
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $A^n = I + nN$. Calculons :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= (I+nN)(N+I) \\ &= N + \underbrace{nN^2}_{=0} + I + nN \\ &= I + (n+1)N. \end{aligned}$$

La propriété est bien héréditaire.

Par principe de récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a bien $A^n = I + nN$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En utilisant, $N = A - I$, on trouve finalement :

$$\boxed{A^n = I + n(A - I) = (1-n)I + nA.}$$

(b) Pour $n = -1$, la formule précédente donne :

$$\boxed{(1-(-1))I + (-1)A = -A + 2I = A^{-1}.}$$

Donc la formule reste valable pour $n = -1$.

3. (a) La matrice X_1 de u_1 dans la base canonique est donnée par le calcul :

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc on a :

$$u_1 = -e_1 - 2e_2 + e_3.$$

Les coordonnées de u_1 sont donc $\boxed{(-1, -2, 1).}$

Les coordonnées de u_2 sont $\boxed{(1, 0, 1).}$

(b) Montrons que (u_1, u_2) est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0.$$

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
On a donc :

$$\lambda_1(-e_1 - 2e_2 + e_3) + \lambda_2(e_1 + e_3) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(-\lambda_1 + \lambda_2)e_1 - 2\lambda_1 e_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)e_3 = 0.$$

Comme (e_1, e_2, e_3) est libre, on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ -2\lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{cases}$$

Donc $\boxed{(u_1, u_2) \text{ est libre.}}$

(c) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 e_1 = 0.$$

On a donc :

$$\lambda_1(-e_1 - 2e_2 + e_3) + \lambda_2(e_1 + e_3) + \lambda_3 e_1 = 0.$$

En réunissant par vecteur de $\mathcal{B}$:

$$(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e_1 - 2\lambda_1 e_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)e_3 = 0.$$

Comme la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, on en déduit :

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \end{cases}$$

système triangulaire dont l'unique solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Donc $\boxed{(u_1, u_2, e_1) \text{ est libre.}}$

Comme (u_1, u_2, e_1) est une famille libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, $\boxed{\text{c'est une base.}}$

Remarque : on peut en fait aller beaucoup plus vite, mais il faut être à l'aise en algèbre linéaire.
En effet, on a $u_1 = (f - \mathrm{Id})(e_1) \neq 0$. Donc $e_1 \notin \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. En particulier, e_1 n'est pas une combinaison linéaire de u_1 et u_2. Comme (u_1, u_2) est libre, la concaténation de e_1 linéairement indépendant est encore libre.

(d) On a $u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ donc :

$$f(u_1) = u_1 \quad \text{et} \quad f(u_2) = u_2.$$

En outre, on a par définition : $(f - \mathrm{Id})(e_1) = u_1$. Donc : $f(e_1) = u_1 + e_1$.
Donc la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, e_1) est :

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

4. (a) Travaillons par opérations sur les lignes :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad & \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longleftrightarrow} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
& \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longleftrightarrow} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
& \underset{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1}{\longleftrightarrow} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
& \underset{L_3 \leftarrow 2L_2 - L_1}{\longleftrightarrow} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\longleftrightarrow} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
& \underset{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2} L_1}{\longleftrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
& \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2}{\longleftrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
& \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3}{\longleftrightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc P est inversible. En appliquant les mêmes opérations sur la matrice identité, on obtient :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.}$$

(b) On a après calcul : $\boxed{PTP^{-1} = A.}$

5. (a) Soit $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
MA = AM \quad & \Leftrightarrow \quad M(PTP^{-1}) = (PTP^{-1})M \\
& \Leftrightarrow \quad MPTP^{-1}P = PTP^{-1}MP \\
& \quad \text{car } P \text{ est inversible} \\
& \Leftrightarrow \quad P^{-1}MPT = P^{-1}PTP^{-1}MP \\
& \Leftrightarrow \quad (P^{-1}MP)T = T(P^{-1}MP).
\end{aligned}$$

(b) Soit $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. On note :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

où $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
MT = TM \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b & a+c \\ d & e & d+f \\ g & h & g+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -g & -h & a-i \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} g = 0 \\ h = 0 \\ d = 0 \\ a = i \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) Soit $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
AM = MA \quad &\Leftrightarrow \quad (P^{-1}MP)T = T(P^{-1}MP) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists a, b, c, d, e \in \mathbb{R},\ P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists a, b, c, d, e \in \mathbb{R},\ M = P\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}P^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc les matrices qui commutent avec A sont les matrices de la forme : $P\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}P^{-1}$.

Problème 4 - EDHEC ECE 2018 (Problème adapté)

Partie I - Étude de f.

1. (a) Comme $t^2 \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\ln(1+t^2) \geqslant 0$.
Donc si $x \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale, on a :

$$\boxed{f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t \geqslant 0.}$$

Si $x < 0$ en revanche, les bornes sont dans le mauvais sens et donc :

$$\boxed{f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t \leqslant 0.}$$

(b) La fonction $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. f en est une primitive et est donc $\mathcal{C}^1$. De plus :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \ln(1+x^2).}$$

(c) On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. (a) On a pour $x \in \mathbb{R}$:
$$f(-x) = \int_0^{-x} \ln(1+t^2)\mathrm{d}t.$$
On considère le changement de variable $u = -t$ qui est bien $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone.
On a $u = -t \Leftrightarrow t = -u$ et donc $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$. Donc :
$$\boxed{f(-x) = \int_0^{x} \ln(1+(-u)^2)(-\mathrm{d}u) = -\int_0^x \ln(1+u^2)\mathrm{d}u = -f(x).}$$
Donc $\boxed{f \text{ est impaire.}}$

(b) f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles. On a de plus pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f''(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$
$f''(x)$ est donc du signe de x.
Donc sur $]-\infty, 0]$, $f''(x) \leqslant 0$ et f est concave. Et sur $[0, +\infty[$, $f''(x) \geqslant 0$ et f est convexe.
En particulier, il y a un unique point d'inflexion au changement de signe de f'' en 0, de coordonnées $(0, f(0)) = (0, 0)$.

3. (a) On a pour tout $a, b, t \in \mathbb{R}$:
$$a + \frac{b}{1+t^2} = \frac{(a+b)+at^2}{1+t^2}.$$
On constate donc qu'on a l'égalité pour tout t si $\boxed{a = 1 \text{ et } b = -1.}$
On peut aller plus loin. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{(a+b)+at^2}{1+t^2} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ t^2 = (a+b)+at^2.$$
Par identification des coefficients des polynômes, on trouve :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \\ a & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -1 \end{array}\right. .$$
C'est donc même l'unique possibilité.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t.$$
On pose $u(t) = \ln(1+t^2)$ et $v(t) = t$. u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc on peut procéder par intégration par parties :
$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x \underbrace{1}_{=v'(t)} \times \underbrace{\ln(1+t^2)}_{=u(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \Bigg[\underbrace{t}_{=v(t)} \times \underbrace{\ln(1+t^2)}_{=u(t)}\Bigg]_0^x - \int_0^x \underbrace{t}_{=v(t)} \times \underbrace{\frac{2t}{1+t^2}}_{=u'(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\underbrace{\int_0^x \mathrm{d}t}_{=x} + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \boxed{x(\ln(1+x^2) - 2) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.}
\end{aligned}$$

4. (a) Calculons :
$$\frac{f(x)}{x\ln(1+x^2)} = \frac{x(\ln(1+x^2)-2)+2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t}{x\ln(1+x^2)} = 1 - \frac{1}{\ln(1+x^2)} + 2\frac{\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t}{x\ln(1+x^2)}.$$
Quand $x \to +\infty$, on a $\ln(1+x^2) \to +\infty$. Donc :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(1+x^2)} = 0.$$
De plus, comme $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \to \frac{\pi}{2}$, on a aussi :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t}{x\ln(1+x^2)} = 0.$$
Ainsi :
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x\ln(1+x^2)} = 1.}$$

(b) Soit $x > 0$. On a :
$$\begin{aligned} 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) &= 2\ln(x) + \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) \\ &= 2\ln(x) + \ln(1+x^2) - \ln(x^2) \\ &= 2\ln(x) + \ln(1+x^2) - 2\ln(x) \\ &= \boxed{\ln(1+x^2).} \end{aligned}$$
On a donc :
$$\frac{\ln(1+x^2)}{2\ln(x)} = 1 + \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln(x)}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$
Ainsi :
$$\frac{f(x)}{2x\ln(x)} = \underbrace{\frac{f(x)}{x\ln(1+x^2)}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1} \times \underbrace{\frac{\ln(1+x^2)}{2\ln(x)}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$
Donc, on a bien :
$$\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x).}$$

(c) Comme f est impair, on a $f(x) = -f(-x)$ et :
$$\boxed{f(x) = -f(-x) \underset{-\infty}{\sim} -2(-x)\ln(-x) \underset{-\infty}{\sim} 2x\ln(-x).}$$

5. (a) On a $f''(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f'' est $\mathcal{C}^1$ par opérations sur les fonctions usuelles. Donc $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^3.}$

(b) On a :
$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^0 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t = 0, \\ f'(0) &= \ln(1+0^2) = 0, \\ f''(0) &= \frac{2\times 0}{1+0^2} = 0. \end{aligned}$$
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f^{(3)}(x) = \frac{2(1+t^2) - 2t \times 2t}{(1+t^2)^2}.$$
Donc :
$$\boxed{f^{(3)}(0) = 2.}$$

(c) D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 3, on trouve :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + \frac{x^1}{1}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + o(x^3) \underset{0}{=} \frac{2x^3}{6} + o(x^3) \underset{0}{=} \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}.}$$

6.

```python
import numpy as np
def approx(n):
    tot = 0
    for k in range(1,n+1):
        tot = tot + np.log(1+(k/n)**2)
    return tot/n
```

Partie II - Étude d'une suite.

7. (a) Pour $n = 0$, on a :

$$\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^0 \mathrm{d}t = \int_0^1 1\mathrm{d}t = 1.$$

Donc oui, la valeur de u_0 est cohérente.

(b) On a :

$$\boxed{u_1 = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^1 \mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t = f(1).}$$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} \mathrm{d}t - \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left[\left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} - \left(\ln(1+t^2)\right)^n\right] \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \underbrace{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}_{\geqslant 0} \left[\ln(1+t^2) - 1\right] \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

De plus, comme $0 \leqslant t \leqslant 1$, on a :

$$\ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) \leqslant \ln(e) \leqslant 1.$$

Donc $\ln(1+t^2) - 1 \leqslant 0$ pour $t \in [0,1]$.
Par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon ordre, on obtient :

$$\boxed{u_{n+1} - u_n \leqslant 0}$$

c'est-à-dire $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

(b) On a : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n \mathrm{d}t$. Comme $\ln(1+t^2) \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale, on a :

$$\boxed{u_n \geqslant 0.}$$

(u_n) est donc décroissante et minorée. D'après le théorème de la convergence monotone, (u_n) converge.

9. (a) Pour tout $t \in [0,1]$, on a $1 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2$. Comme ln est croissante, on en déduit :

$$\underbrace{\ln(1)}_{=0} \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2).$$

Puis par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$0 \leqslant \ln(1+t^2)^n \leqslant \ln(2)^n.$$

Par croissance de l'intégrale (avec les bornes dans le bon ordre), on a :

$$\boxed{\underbrace{\int_0^1 0\mathrm{d}t}_{=0} \leqslant \underbrace{\int_0^1 (\ln(1+t^2))^n \mathrm{d}t}_{=u_n} \leqslant \underbrace{\int_0^1 (\ln(2))^n \mathrm{d}t}_{=(\ln(2))^n}.}$$

(b) Comme $1 < 2 < e$, par stricte croissance de ln, on a :

$$\underbrace{\ln(1)}_{=0} < \ln(2) < \underbrace{\ln(e)}_{=1}.$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} (\ln(2))^n = 0.$$

Donc par encadrement, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

10. (a) Pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\ln(1+t^2) \leqslant \ln(2).$$

Donc :

$$1 - \ln(1+t^2) \geqslant 1 - \ln(2)$$

puis, comme $\ln(2) < 1$ et donc $1 - \ln(2) > 0$:

$$0 < \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{1-\ln(2)}.$$

En multipliant par $(\ln(1+t^2))^n$ (qui est positif), on obtient :

$$0 \leqslant \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(2)}.$$

Et donc par croissance de l'intégrale (avec les bornes dans le bon sens) :

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \mathrm{d}t \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}.}$$

(b) Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, par encadrement, on trouve :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \mathrm{d}t = 0.}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln(1+t^2)\right)^n\right] \mathrm{d}t \\
&= \boxed{\int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

(somme des termes d'une suite géométrique)

(d) Par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t - \underbrace{\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}.$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t.}$$