Correction DS 1 - Révisions Maths Approfondies

Exercice 1 - ESCP ECS 2019

1. Il suffit de calculer par étapes. On a :

$$\boxed{u_1} = \frac{1}{2}(u_0 + v_0) = \frac{1}{2}(0+1) \boxed{= \frac{1}{2}}$$

et :

$$\boxed{v_1} = \frac{1}{2}(u_1 + v_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) \boxed{= \frac{3}{4}}.$$

Continuons :

$$\boxed{u_2} = \frac{1}{2}(u_1 + v_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right) \boxed{= \frac{5}{8}}$$

et :

$$\boxed{v_2} = \frac{1}{2}(u_2 + v_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\right) \boxed{= \frac{11}{16}}.$$

2.

```python
def valeurs(n):
    # On commence avec u0 et v0
    u = 0
    v = 1
    # On fait ensuite n itérations
    # Si n=0, alors la boucle ne s'éxecute pas
    for k in range(n):
        # Pour u, on utilise la formule
        u = (u+v)/2
        # Pour v également, mais remarquez
        # que u a déjà été mis a jour avec
        # la valeur u(n+1)
        v = (u+v)/2
    return u,v
```

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\begin{aligned}\boxed{u_{n+1} - u_n} &= \frac{1}{2}(u_n + v_n) - u_n \\ &= \frac{1}{2}(v_n - u_n) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}w_n.}\end{aligned}$$

(b) Encore une fois, soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\begin{aligned}\boxed{w_{n+1}} &= v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) - u_{n+1} \text{ (formule de récurrence pour } v_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}(v_n - u_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(v_n - \left(\frac{1}{2}w_n + u_n\right)\right) \text{ (formule de la question précédente)} \\ &= \frac{1}{2}(v_n - u_n) - \frac{1}{4}w_n = \frac{1}{2}w_n - \frac{1}{4}w_n = \boxed{\frac{1}{4}w_n.}\end{aligned}$$

Donc (w_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

(c) i. Comme (w_n) est géométrique, on est à deux doigts d'avoir une expression complète. Calculons rapidement :

$$w_0 = v_0 - u_0 = 1 - 0 = 1.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_n = w_0 \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned}\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} w_k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} \text{ (somme des termes d'une suite géométriques)} \\ &= \frac{1}{\frac{3}{4}}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \boxed{\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right).}\end{aligned}$$

ii. La question 3a) permet de calculer $u_{n+1} - u_n$. L'idée est donc d'écrire u_n à partir de ces différences en utilisant une somme télescopique :

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k).$$

On a ainsi pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned}\boxed{u_n} &= u_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = 0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} w_k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \text{ (formule valide uniquement pour } n \neq 0) \\ &= \boxed{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right).}\end{aligned}$$

iii. Pour $n = 0$, on a d'une part $u_n = u_0 = 0$. Et d'autre part :

$$\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^0\right) = \frac{2}{3}(1-1) = 0.$$

On a donc bien $u_0 = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^0\right)$. Et donc la formule :

$$u_n = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

est bien valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}.}$$

(e) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - u_n$. On connaît les expressions de u_n et w_n, on peut donc en déduire celle de v_n. Calculons pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\boxed{v_n} &= w_n - u_n \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \\ &= \left(1+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3} \\ &= \boxed{\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3}.}\end{aligned}$$

Comme pour (u_n), on en déduit la limite :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{5}{3}\times 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}.}$$

4. (a) Déjà, on peut facilement dire que la seule valeur possible de α est $\frac{2}{3}$ car sinon la suite (t_n) tend vers une valeur non nulle et la série diverge grossièrement. Il reste donc à vérifier que la série converge bien pour $\alpha = \frac{2}{3}$.
Regardons la forme exacte de t_n pour $n \in \mathbb{N}$ lorsque $\alpha = \frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{9}{8}(\alpha - u_n) = \frac{9}{8}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\right) \\ &= \frac{9}{8}\times\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

(t_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$. Comme sa raison est entre -1 et 1 strictement, sa série converge.

Dans les questions suivantes, on choisit $\alpha = \frac{2}{3}$.

(b) Clairement $t_n > 0$ à la formule précédemment trouvée. Et comme (t_n) est géométrique on peut facilement calculer sa somme :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{3}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}\times\frac{1}{\frac{3}{4}} = 1.}$$

5. (a) Établissons d'abord la loi de Y. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}([Y=n]) = \mathbb{P}([X+1=n]) = \mathbb{P}([X=n-1]) = t_{n-1} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)^{n-1}.}$$

Y suit donc une loi géométrique de paramètre $\frac{3}{4}$.
Note : Si l'énoncé n'était pas entièrement clair, on s'intéresse forcément au cas où $\alpha = \frac{2}{3}$. En effet, il faut que la somme des probabilités fassent 1 et donc que la série des t_n converge (et même converge vers 1).

(b) Commençons par l'espérance et la variance de Y. En tant que loi géométrique, on a :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

On a aussi :

$$V(Y) = \frac{1-\frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{4}{9}.$$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y-1) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.}$$

La variance n'est pas affectée par l'ajout ou la soustraction d'une constante et donc :

$$\boxed{V(X) = V(Y) = \frac{4}{9}.}$$

Exercice 2 - Ecricome ECS 2017

1. (a) On a $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée. En conséquence, f admet une limite en 0 et on a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

En conséquence, par continuité de l'exponentielle et composition de limite, on a également :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{x\ln x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

(b) Commençons par l'étude de f. f est dérivable sur $]0,1]$ comme produit de fonctions dérivables. De plus, pour $x \in]0,1]$, on a :

$$f'(x) = \ln(x) + \frac{x}{x} = \ln(x) + 1.$$

On résout sur $\mathbb{R}_+^\star$ l'inéquation :

$$\begin{array}{rcl} \ln(x) + 1 & \geq & 0 \\ \Leftrightarrow \ln(x) & \geq & -1 \\ \Leftrightarrow x & \geq & \dfrac{1}{\mathrm{e}}. \end{array}$$

Donc f est strictement décroissante sur $]0, 1/\mathrm{e}[$ puis strictement croissante $]1/e, 1[$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$1/e$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	0

où on a complété la limite en 0 avec la première question et les valeurs en $1/\mathrm{e}$ et 1 par calcul direct.

On peut compléter le tableau de variation de g en remarquant que $g = \exp \circ f$ et que exp est strictement croissante. Ainsi les variations de g sont les mêmes que celles de f. On a donc :

x	0		$1/e$		1
$g(x)$	1	$\searrow$	$\exp\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$	$\nearrow$	1

(c) On a déjà noté que g admet une limite en 0. On peut donc prolonger par continuité g en 0 en une fonction $\tilde{g}$ définie et continue sur $[0,1]$ par :

$$\tilde{g}(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} g(x) & \text{si} & x \in]0,1] \\ 1 & \text{si} & x = 0 \end{array} \right. .$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ est faussement impropre et on a simplement $I = \int_0^1 \tilde{g}(t)\mathrm{d}t$.

2. (a) On a vu dans la question précédente que $f : x \mapsto x\ln(x)$ admet une limite en 0. Ainsi on peut prolonger par continuité en 0 la fonction f. De même la fonction $x \mapsto (x\ln(x))^n$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 et est donc prolongeable par continuité.

L'intégrale définissant u_n est donc faussement impropre et u_n est ainsi bien définie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

(b) La question est plus difficile. Attention, on n'a pas le droit de dire n'importe quoi. On ne dit surtout pas que la limite de l'intégrale est l'intégrale de la limite. Il faut être plus prudent.

L'idée est de majorer l'intégrale. En effet, on a vu aux questions précédentes que :

$$\forall t \in [0,1], \ -\frac{1}{\mathrm{e}} \leq \tilde{f}(t) \leq 0$$

où $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f. On a donc :

$$\forall t \in [0,1], \ |\tilde{f}(t)| \leq \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Puis :

$$\forall t \in [0,1],\ |\tilde{f}(t)|^n \leq \frac{1}{\mathrm{e}^n}$$

par croissance de la fonction puissance. Puis, comme $\frac{1}{\mathrm{e}} < 1$, on a $\frac{1}{\mathrm{e}^n} < 1$. On peut maintenant majorer u_n pour $n \in \mathbb{N}$ fixé :

$$\begin{aligned} |u_n| &= \frac{1}{n!}\left|\int_0^1 (t\ln(t))^n \mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{1}{n!}\int_0^1 |(t\ln(t))^n| \mathrm{d}t \text{ (inégalité triangulaire pour l'intégrale)} \\ &\leq \frac{1}{n!}\int_0^1 1\mathrm{d}t \text{ (croissance de l'intégrale appliquée à l'inégalité précédente)} \\ &\leq \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{n!}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, (u_n) tend vers 0 également (théorème des gendarmes appliqué à $-\frac{1}{n!} \leq u_n \leq \frac{1}{n!}$).

(c) Calculons :

$$\begin{aligned} \boxed{u_0} &= \frac{1}{0!}\int_0^1 (t\ln(t))^0 \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 1\mathrm{d}t \\ &= \boxed{1.} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{1!}\int_0^1 (t\ln(t))^1 \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Là, on a un peu plus de travail. Ce genre d'intégrales se calculent naturellement par intégration par parties. Mais l'intégrale est impropre en 0. Et on ne peut que difficilement travailler avec le prolongement par continuité car l'expression sous forme de produit n'est pas valide en 0 et on en a besoin pour appliquer à l'intégration par parties.

Donc pour le faire proprement, nous allons calculer :

$$\int_\epsilon^1 t\ln(t)\mathrm{d}t$$

avec $\epsilon \in]0,1[$ et on fera tendre ϵ vers 0 à la fin. Calculons donc :

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^1 \underbrace{t}_{u'(t)}\underbrace{\ln(t)}_{v(t)}\mathrm{d}t &= \left[\underbrace{\frac{t^2}{2}}_{u(t)}\underbrace{\ln(t)}_{v(t)}\right]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \underbrace{\frac{t^2}{2}}_{u(t)}\underbrace{\frac{1}{t}}_{v'(t)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1^2 \times \ln(1)}{2} - \frac{\epsilon^2 \times \ln(\epsilon)}{2} - \frac{1}{2}\int_\epsilon^1 t\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\epsilon^2 \times \ln(\epsilon)}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_\epsilon^1 \\ &= -\frac{\epsilon^2 \times \ln(\epsilon)}{2} - \frac{1^2}{4} + \frac{\epsilon^2}{4} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{\epsilon^2}{4}\left(1 - 2\ln(\epsilon)\right). \end{aligned}$$

Sans que ce soit une garantie de la justesse de notre réponse, on vérifie les points saillants de ce que l'on trouve :

- La formule est négative pour $\epsilon < 1$ ce qui correspond bien au signe qu'on avait trouver pour f.
- Pour $\epsilon = 1$, on a bien une intégrale nulle.

On prend maintenant la limite quand ϵ tend vers 0. Le terme $\frac{\epsilon^2}{4}$ tend vers 0. Le terme $\frac{\epsilon^2 \ln(\epsilon)}{2}$ tend également vers zéro par croissance comparée. On a donc :

$$\boxed{u_1 = \int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}.}$$

(d) Avant de continuer, on remarque que l'énoncé nous donne les réponses aux questions précédentes. Pour $n = 0$, la formule donne bien $u_0 = 1$ et $u_1 = -1/4$. C'est bon, on ne s'est pas trompé !

On continue. Le sujet nous parle d'intégrales successives. Il est bon d'essayer au brouillon le calcul de u_2 pour voir ce qu'il se passe :

$$u_2 = \frac{1}{2!}\int_0^1 (t\ln(t))^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 (t\ln(t))^2\mathrm{d}t.$$

Comme pour u_1, on explicite la limite à la borne inférieure pour pouvoir faire les calculs d'intégrations par parties. Calculons donc l'intégrale en commençant par une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^1 (t\ln(t))^2\mathrm{d}t &= \int_\epsilon^1 \underbrace{t^2}_{u'(t)}\underbrace{(\ln(t))^2}_{}v(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[\underbrace{\frac{t^3}{3}}_{u(t)}\underbrace{(\ln(t))^2}_{v(t)}\right]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \underbrace{\frac{t^3}{3}}_{u(t)}\underbrace{2\times\frac{1}{t}\times\ln(t)}_{v'(t)}\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\frac{1^3\ln(1)^2}{3}}_{=0} - \underbrace{\frac{\epsilon^3\ln(\epsilon)^2}{3}}_{\longrightarrow 0} - \frac{2}{3}\int_\epsilon^1 t^2\ln(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Le premier terme vaut zéro et donc disparaît simplement. Le second terme est non nul mais il tend vers zéro lorsque ϵ tend vers 0 (c'est une croissance comparée). Dans la limite qui nous intéresse, il disparaît donc. On peut du coup réécrire le résultat dans cette limite. On a :

$$\int_0^1 (t\ln(t))^2\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\int_0^1 t^2\ln(t)\mathrm{d}t.$$

On voit que l'intégration par partie a fait baisser la puissance du logarithme mais pas celle du monôme. On commence alors à deviner pourquoi le sujet parle d'intégrations par partie successives : si on en refait une la puissance du logarithme devrait baisser encore une fois. Dans le cas général du calcul de u_n, on devrait pouvoir en faisant n intégrations par partie faire disparaître entièrement le logarithme de l'intégrale et obtenir une intégrale faile à calculer.

Finissons le calcul de u_2 (toujours au brouillon) pour valider notre idée. On reprend notre nouvelle intégrale impropre en faisant apparaître un ϵ à la borne inférieure :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (t\ln(t))^2 &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 (t\ln(t))^2 \\
&= -\frac{2}{3}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \underbrace{t^2}_{u'(t)}\underbrace{\ln(t)}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{3}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\left[\underbrace{\frac{t^3}{3}}_{u(t)}\underbrace{\ln(t)}_{v(t)}\right]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \underbrace{\frac{t^3}{3}}_{u(t)}\underbrace{\frac{1}{t}}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{2}{3}\lim_{\epsilon\to 0}\left(-\frac{\epsilon^3\ln(\epsilon)}{3} - \frac{1}{3}\int_\epsilon^1 t^2\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 t^2\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3^2}\int_0^1 t^2\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

L'intégrale que l'on obtient n'a effectivement plus de logarithme et on peut la calculer directement :

$$\int_0^1 t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

Et donc, on a :

$$\int_0^1 (t\ln(t))^2 = \frac{2}{3^3}.$$

Si on revient à la formule de u_2, on a :

$$\boxed{u_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 (t\ln(t))^2 = \frac{1}{3^3}}$$

qui est bien égale à $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ pour $n = 2$.

Bien, il n'y a plus qu'à généraliser et à le rédiger proprement sur notre copie. C'est un peu délicat à bien faire mais voici une proposition qui fonctionne.
Posons pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$:

$$I_{n,k} = \int_0^1 t^n(\ln t)^k\mathrm{d}t.$$

On reprend le calcul précédent pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}
I_{n,k+1} &= \int_0^1 t^n(\ln t)^{k+1}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \underbrace{t^n}_{u'(t)}\underbrace{(\ln t)^{k+1}}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\left[\underbrace{\frac{t^{n+1}}{n+1}}_{u(t)}\underbrace{(\ln t)^{k+1}}_{v(t)}\right]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \underbrace{\frac{t^{n+1}}{n+1}}_{u(t)}\underbrace{\frac{k+1}{t}(\ln t)^k}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 t^n(lnt)^k\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{I_{n,k+1} = -\frac{k+1}{n+1}I_{n,k}.}$$

On en déduit en appliquant la formule successivement pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\boxed{I_{n,k} = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^k} I_{n,0}.}$$

Or pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n!} I_{n,n}$. Donc :

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n!} I_{n,n} = \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^n} I_{n,0} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^n} \int_0^1 t^n \mathrm{d}t.}$$

Or :

$$\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

Donc :

$$\boxed{u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.}$$

(e) Après tous ces calculs, la question est presque facile. *Presque* car il ne faut pas faire de bêtises : on sent qu'on va facilement pouvoir dominer les termes **mais** on ne peut faire des comparaisons que pour les séries à termes positifs. On va donc chercher à montrer que $\sum u_n$ est absolument convergente.
On a :

$$|u_n| = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \text{ pour } n \geq 1.$$

Or la série des $\frac{1}{2^{n+1}}$ converge donc la série des u_n converge absolument.

(f)

```python
def somme(n):
    # S représente la somme partielle
    # On met tout de suite u0 dans S puisque le terme
    # est toujours présent quel que soit n
    S = 1
    # Attention, range(n) fait bien n itérations
    # mais elles vont de 0 à n-1. Ici pour que k
    # représente bien l'indice de u, on le fait aller de
    # 1 à n, mais comme le dernier terme est exclu, on utilise
    # range(1,n+1) .
    # Notez que si n = 0, alors la boucle ne s'exécute pas du tout.
    for k in range(1,n+1):
        # Utiliser une variable intermediaire pour u n'est pas
        # obligatoire, mais augmente la lisibilite
        u = (-1)**k / ((k+1)**(k+1))
        S = S + u
    return S
```

3. (a) La fonction exponentielle est $\mathcal{C}^\infty$. Pour peu que l'on arrive à borner la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ sur le segment, on pourra appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
Or la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ de l'exponentielle est tout simplement l'exponentielle. Il suffit donc de borner l'exponentielle sur $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right]$.
Comme exp est croissante, sur ce segment, on a :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right], \ \exp(x) \leq \exp(0) = 1.$$

Comme exp est positive, on a finalement n étant fixé :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right], \ |\exp^{n+1}(x)| \leq 1.$$

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange qui nous dit que si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle J et si $f^{(n+1)}$ est bornée par M sur J alors pour a et b dans J :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Appliquons le théorème en prenant $f = \exp$, $a = 0$, $b = x \in \left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right]$ et $M = 1$. On a alors :

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On n'a pas encore la formule attendue. Il faut remarquer que $|x| \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$ et donc effectivement :

$$\boxed{\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
|I - S_n| &= \left| \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \int_0^1 (t\ln(t))^n \mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_0^1 \left(g(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} (t\ln(t))^n \right) \mathrm{d}t \right| \text{ (linéarité de l'intégrale : tout converge)} \\
&\leq \int_0^1 \left| g(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} (t\ln(t))^n \right| \mathrm{d}t \text{ (inégalité triangulaire)} \\
&\leq \int_0^1 \left| \exp(t\ln(t)) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} (t\ln(t))^n \right| \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!} \mathrm{d}t \text{ (croissance de l'intégrale et question précédente)} \\
&\leq \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}. \text{ (Intégrale d'une constante)}
\end{aligned}$$

(c) D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |I - S_n| \leq \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}.$$

Or $\frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc S_n tend vers I lorsque n tend vers $+\infty$. Comme les S_n sont les sommes partielles des u_n, cela signifie que la série de terme général u_n converge vers I. Formellement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{(n+1)}} = I.$$

Il suffit alors de réindicer et de sortir un -1 pour obtenir :

$$\boxed{I = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.}$$

(d) La question n'est pas une simple question de code. Il faut en effet trouver un moyen de majorer l'erreur par ϵ. La réponse se trouve dans la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |I - S_n| \leq \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}.$$

On a une majoration de l'erreur commise par $\frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}$. Il faut donc calculer S_n avec n tel que $\frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!} \leq \epsilon$.

```python
def estimation(eps):
    # On commence par trouver le n nécessaire
    # Pour ça on part de 0 et on incrémente n tant que
    # l'estimation de l'erreur donnée par la formule précédente
    # est plus grande que eps
    n = 0
    while 1/(numpy.e**(n+1) * numpy.math.factorial(n+1)) > eps:
        n = n+1
    # Inutile de refaire tout le travail : on utilise la fonction
    # somme pour faire le calcul
    return somme(n)
```

Exercice 3 - EDHEC ECE 2019 (adapté)

1. (a) On a :
$$A-I=\begin{pmatrix}0&1&1\\-2&3&2\\1&-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}.$$
Puis :
$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$
(b) Comme A et I commutent, on a :
$$(A-I)^2=A^2-2A+I.$$
Donc comme $(A-I)^2=0$, on a :
$$A(-A+2I)=I.$$
Et de même, $(-A+2I)A=I$. Donc A est inversible et :
$$\boxed{A^{-1}=-A+2I.}$$

2. (a) Comme N et I commutent (I commute avec toute matrice), on peut utiliser le binôme de Newton. On trouve pour $n\in\mathbb{N}$:
$$A^n=(N+I)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^kI^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k.$$
Or, on a $N=A-I$ et donc $N^2=0$ et par récurrence immédiate $N^k=0$ si $k\geqslant 2$.
Donc si $n\geqslant 2$, on a :
$$A^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{N^k}_{=0\text{ si }k\geqslant 2}=\sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}N^k=\binom{n}{0}I+\binom{n}{1}N=I+nN.$$
On constate que la formule reste vraie pour $n=0$ ou $n=1$. D'où finalement :
$$\boxed{A^n=I+n(A-I).}$$
(b) Pour $n=-1$, la formule précédente donne :
$$\boxed{I+(-1)(A-I)=-A+2I=A^{-1}.}$$
Donc la formule reste valable pour $n=-1$.

3. (a) La rang de $f - \mathrm{Id}$ est le même que celui de la matrice $A - I$. Or :

$$\mathrm{rg}(A-I) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

car toutes les colonnes sont proportionnelles et non nulles.
Donc $\boxed{\mathrm{rg}(f - \mathrm{Id}) = 1.}$

(b) Commençons par remarquer que :

$$(f-\mathrm{Id})(u_1) = (f-\mathrm{Id})((f-\mathrm{Id})(e_1)) = \underbrace{(f-\mathrm{Id})^2}_{=0}(e_1) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Puis :

$$(f-\mathrm{Id})(u_2) = (f-\mathrm{Id})(e_1+e_3).$$

On représente ce calcul par des matrices dans la base canonique :

$$(A-I)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Et donc $(f-\mathrm{Id})(u_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
Donc $\boxed{u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}).}$
La matrice X_1 de u_1 dans la base canonique est donnée par le calcul :

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Donc on a :

$$u_1 = -e_1 - 2e_2 + e_3.$$

Montrons que (u_1, u_2) est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0.$$

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
On a donc :

$$\lambda_1(-e_1 - 2e_2 + e_3) + \lambda_2(e_1 + e_3) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(-\lambda_1 + \lambda_2)e_1 - 2\lambda_1 e_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)e_3 = 0.$$

Comme (e_1, e_2, e_3) est libre, on en déduit le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ -2\lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc $\boxed{(u_1, u_2) \text{ est libre.}}$
D'après le théorème du rang, on a :

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) = 3 - \mathrm{rg}(f-\mathrm{Id}) = 2.}$$

Donc (u_1, u_2) est une famille libre de deux éléments d'un espace de dimension 2.
$\boxed{\text{C'est une base de } \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}).}$

4. (a) On a $u_1 = (f-\mathrm{Id})(e_1) \neq 0$. Donc $e_1 \notin \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$. En particulier, e_1 n'est pas une combinaison linéaire de u_1 et u_2.
Comme (u_1, u_2) est libre, la concaténation de e_1 linéairement indépendant est encore libre.
Par égalité des dimensions, $\boxed{(u_1, u_2, e_1) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

(b) On a $u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ donc :

$$f(u_1) = u_1 \quad \text{et} \quad f(u_2) = u_2.$$

En outre, on a par définition : $(f - \mathrm{Id})(e_1) = u_1$. Donc : $f(e_1) = u_1 + e_1$.
Donc la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, e_1) est :

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

5. On remarque que P est la matrice de passage de la base canonique à la base (u_1, u_2, e_1).
$\boxed{\text{Elle est donc inversible.}}$
De plus, on a : $\boxed{A = PTP^{-1}}$ par changement de base.

6. (a) Soit $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. On note :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

où $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
MT = TM \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b & a+c \\ d & e & d+f \\ g & h & g+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -g & -h & a-i \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} g = 0 \\ h = 0 \\ d = 0 \\ a = i \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad M = a(E_{1,1} + E_{3,3}) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + eE_{2,2} + fE_{2,3} \\
&\Leftrightarrow \quad M \in \mathrm{Vect}(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}).
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{E = \mathrm{Vect}(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}).}$
La famille est clairement libre. Elle engendre E. C'est donc une base de E. Et donc :

$$\boxed{\dim E = \mathrm{Card}(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}) = 5.}$$

(b) Soit $N \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
NA = AN \quad &\Leftrightarrow \quad N(PTP^{-1}) = (PTP^{-1})N \\
&\Leftrightarrow \quad NPTP^{-1}P = PTP^{-1}NP \\
& \quad \text{car } P \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \quad P^{-1}NPT = P^{-1}PTP^{-1}NP \\
&\Leftrightarrow \quad (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP).
\end{aligned}$$

(c) Soit $N \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{array}{rcl} N \in F & \Leftrightarrow & NA = AN \\ & \Leftrightarrow & (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP) \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}NP \in E \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}NP \in \mathrm{Vect}(E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}) \\ & \Leftrightarrow & \exists a,b,c,d,e \in \mathbb{R},\ P^{-1}NP = a(E_{1,1}+E_{3,3}) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + dE_{2,2} + eE_{2,3} \\ & \Leftrightarrow & \exists a,b,c,d,e \in \mathbb{R},\ N = aP(E_{1,1}+E_{3,3})P^{-1} + bPE_{1,2}P^{-1} + cPE_{1,3}P^{-1} + dPE_{2,2}P^{-1} + ePE_{2,3}P \\ & \Leftrightarrow & N \in \mathrm{Vect}(P(E_{1,1}+E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}). \end{array}$$

D'où :

$$\boxed{F = \mathrm{Vect}(P(E_{1,1}+E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}).}$$

Problème 4 - EM Lyon ECS 2007 (extrait)

Partie I - Étude de l'application f

1. f est clairement continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur cet intervalle. Il suffit donc de vérifier la continuité en 0 de f.

   Pour cela, regardons la limite de f en 0^+ :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

   Attention, pas de croissance comparée ici (on n'est pas aux bords du domaine de définition de ln mais en plein milieu). Il faut reconnaître ici la limite d'un taux de variation :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

   Or $f(0) = 1$. Donc on a bien :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).}$$

   Donc f est bien continue en 0 et donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. (a) f est de classe $\mathcal{C}^1$ comme quotient. Calculons sa dérivée. Pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \boxed{f'(x)} & = & \dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2} \\ & = & \dfrac{\frac{x}{1-x} - (1-x)\ln(1+x)}{x^2} \\ & = & \boxed{\dfrac{A(x)}{x^2}.} \end{array}$$

   (b) On peut utiliser la formule précédente. On aimerait que $A(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$. Essayons de le démontrer en calculer le DL à l'ordre 2 de $A(x)$ en 0^+. Pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x) \\ & = & x(1-x+o_{x\to 0^+}(x)) - \left(x - \dfrac{x^2}{2} + o_{x\to 0^+}(x^2)\right) \\ & = & x - x^2 - x + \dfrac{x^2}{2} + o_{x\to 0^+}(x^2) \\ & = & -\dfrac{x^2}{2} + o_{x\to 0^+}(x^2). \end{array}$$

On a donc bien :

$$\boxed{A(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2}{2}.}$$

On peut alors travailler avec les équivalents dans f'. On a :

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{A(x)}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{2}.}$$

Donc f' admet bien une limite en 0 à droite et cette limite est $-\frac{1}{2}$.

(c) f est donc $\mathcal{C}^0$ sur $[0,+\infty[$, $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée f' admet une limite en 0. Le théorème de prolongement de la dérivée donne donc que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et sa dérivée en 0 est :

$$\boxed{f'(0) = -\frac{1}{2}.}$$

(d) Étudions la fonction A. La fonction A est définie et dérivable sur $[0,+\infty[$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$A'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = -\frac{x}{(1+x)^2}.$$

Comme $x \geq 0$, on en déduit que $A'(x) \leq 0$ (et même strictement négative pour $x > 0$).
Pour compléter le tableau de variation, calculons :

$$\boxed{A(0) = 0.}$$

Calculons aussi la limite en $+\infty$. On a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} A(x)} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right) = \boxed{-\infty.}$$

On a donc le tableau :

x	0	$+\infty$
$A'(x)$	0	$-$
$A(x)$	0 ↘	$-\infty$

On voit donc que A est négative (et même strictement pour x $neq0$).
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2} < 0$. Ainsi f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
Attention cependant, la formule avec A n'est valide que pour $x \neq 0$, on n'a donc pas la décroissance stricte sur $\mathbb{R}_+$ en entier à ce stade.
Mais on a vu que f' existe en 0 et vaut $-\frac{1}{2}$ et est donc négative. On a donc bien la décroissance sur $\mathbb{R}_+$ en entier.

(e) C'est une simple croissance comparée :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{x} = 0.}$$

3. (a) Encore une fois, f est deux fois dérivable comme quotient. On peut aussi le voir à partir de la formule avec A de f' qui est valide sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

De plus, en partant de $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$, pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a :

$$\begin{aligned}
\boxed{f''(x)} &= \frac{\left(\frac{1}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}\right)x^2 - \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right) \times 2x}{x^4} \\
&= \frac{-\frac{x^2}{(1+x)^2} - 2\frac{x}{1+x} - 2\ln(1+x)}{x^3} \\
&= \frac{-\frac{x^2+2x(1+x)}{(1+x)^2} - 2\ln(1+x)}{x^3} \\
&= \frac{-\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} - 2\ln(1+x)}{x^3} \\
&= \boxed{\frac{B(x)}{x^3}}.
\end{aligned}$$

(b) B est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. De plus pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
\boxed{B'(x)} &= -\frac{6x+2}{(1+x)^2} + 2\frac{3x^2+2x}{(1+x)^3} + \frac{2}{1+x} \\
&= \frac{-2(3x+1)(1+x) + 2(3x^2+2x) + 2(1+x)^2}{(1+x)^3} \\
&= \frac{-6x^2 - 8x - 2 + 6x^2 + 4x + 2x^2 + 4x + 2}{(1+x)^3} \\
&= \frac{2x^2}{(1+x)^3} \\
&= \boxed{2\frac{x^2}{(1+x)^3}}.
\end{aligned}$$

Ainsi B' est positive et B est croissante.
On calcule rapidement :

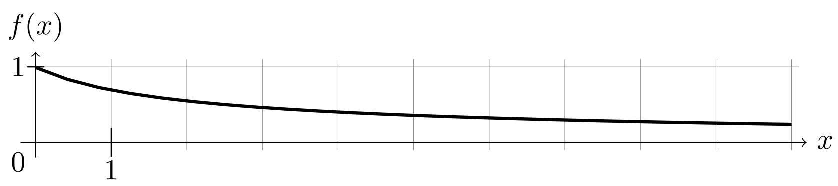
$$\boxed{B(0) = 0} \text{ et } \boxed{\lim_{x\to+\infty} B(x) = +\infty.}$$

On a finalement le tableau :

x	0	$+\infty$
$B'(x)$	0 $\quad +$	
$B(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

(c) On déduit de la question précédente que B est positive et donc f'' aussi. Comme f est $\mathcal{C}^2$, on en déduit que sa dérivée est croissante et que f est bien convexe sur $]0, +\infty[$.

4. Avec l'ordinateur, je triche un peu mais voici le genre de courbe à tracer :



Partie II - Un développement en série

1. On peut reconnaître le développement limité de $\frac{1}{1+t}$ et on pourrait essayer de passer par ce genre de techniques mais c'est vouer à l'échec : ici il y a bien égalité stricte, il n'y a pas de petit o ou d'équivalents. Il faut donc procéder autrement.

En fait, c'est même beaucoup plus simple. Partons du membre de droite pour $N \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}} &= \frac{\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k(1+t) + (-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t} \text{ (même dénominateur)} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{N}((-1)^k t^k + (-1)^k t^{k+1}) + (-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{N}((-1)^k t^k - (-1)^{k+1} t^{k+1}) + (-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t} \\
&\quad \text{(on réajuste les puissances)} \\
&= \frac{(-1)^0 t^0 - (-1)^{N+1}t^{N+1}) + (-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t} \text{ (somme télescopique)} \\
&= \boxed{\frac{1}{1+t}.}
\end{aligned}$$

2. On intègre l'égalité précédente entre 0 et $x \in [0,1]$. On a donc :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

Or :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t &= [\ln(1+t)]_0^x \\
&= \ln(1+x) - \ln(1) \\
&= \ln(1+x).
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\right)\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \int_0^x t^k \mathrm{d}t + \int_0^x \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t \\
&\quad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \int_0^x t^k \mathrm{d}t + J_N(x) \\
&= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x + J_N(x) \\
&= \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x).
\end{aligned}$$

Et en remettant tout ensemble, on a bien :

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x).}$$

3. Soit $x \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned}
\boxed{|J_N(x)|} &= \left|\int_0^x \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x \left|\frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\right| \mathrm{d}t \text{ (inégalité triangulaire)} \\
&\leq \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t \text{ (car } t \geq 0) \leq \int_0^x t^{N+1}\mathrm{d}t \text{ (car } \frac{1}{1+t} \leq 1 \text{ et par croissance de l'intégrale)} \\
&\leq \left[\frac{t^{N+2}}{N+2}\right]_0^x \leq \boxed{\frac{x^{N+2}}{N+2}.}
\end{aligned}$$

4. Avec la majoration précédente, on a pour $x \in [0,1]$:

$$0 \leq |J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2} \leq \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Donc $J_N(x)$ tend vers 0 à l'infini.
Or à x fixé, $\ln(1+x)$ est une constante vis-à-vis de N et est donc égale à sa limite. En écrivant :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) - J_N(x)$$

on trouve que la limite des sommes est $\ln(1+x)+0$ c'est-à-dire $\ln(1+x)$. Donc la série converge et, avec un changement d'indice, on obtient :

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.}$$

Partie III - Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

1. On commence à connaître la chanson, c'est partie. Pour $x \in]0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\boxed{\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right|} &= \left| \frac{\ln(1+x)}{x} - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \\
&= \left| \frac{\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x)}{x} - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \\
&\quad \text{(formule de } \ln(1+x) \text{ de la partie précédente)} \\
&= \left| \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} + \frac{J_N(x)}{x} - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \\
&= \left| \frac{J_N(x)}{x} \right| \\
&\leq \frac{x^{N+2}}{x(N+2)} \\
&\leq \boxed{\frac{x^{N+1}}{(N+2)}}.
\end{aligned}$$

Mais, on n'a pas traité le cas $x = 0$ pour lequel f a une expression différente. Mais la vérification est facile à faire puisque :

$$\left| f(0) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k 0^k}{k+1} \right| = \left| f(0) - 1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k 0^k}{k+1} \right| = |1-1-0| = 0.$$

Notez que l'on a utilisé la notation $0^0 = 1$ qui n'est pas conventionnelle mais qui est en fait adoptée implicitement par le sujet.

2. Pour la première partie de la question, on pourrait utiliser le critère des séries alternées. Malheureusement, il est hors-programme et il faudrait donc le redémontrer.
Dans ce cas cependant, on n'en a pas besoin : la série est absolument convergente puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente d'après le critère des séries de Riemann.
Pour la seconde partie, la question est technique. Allons-y par étapes. On va chercher à calculer $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ qui existe bien puisque f est continue sur $[0,1]$. On veut se ramener à une série qui ressemble étrangement à l'intégrale de la somme de la question précédente. On va donc la faire apparaître à la main. Pour N fixé, on

a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} + \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k+1} \int_0^1 x^k \mathrm{d}x + \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k+1} \frac{1}{k+1} + \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x \\
&\ \text{(intégration non détaillée)} \\
&= \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x. \\
&\ \text{(changement d'indice)}
\end{aligned}$$

Ok. On a presque ce qu'on veut : la somme du début va tendre vers la série recherchée. On a même déjà la convergence de ladite série.

Il faut donc montrer que le morceau qui reste tend vers 0. Et c'est là qu'il faut travailler. On va chercher à majorer ledit morceau :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x \right| &\leq \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \mathrm{d}x \\
&\ \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leq \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{N+2} \mathrm{d}x \\
&\ \text{(croissance de l'intégrale et formule de la question précédente)} \\
&\leq \frac{1}{(N+2)^2}. \text{ (calcul de l'intégrale non détaillée)}
\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{(N+2)^2} = 0$$

Donc on a bien :

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x = 0.$$

On en déduit :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.}$$

3. Pour $N \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} = \underbrace{\frac{1}{(2 \times 0 + 1)^2}}_{\text{terme } p=0 \text{ de la première somme}} + \sum_{p=1}^{N} \left(\frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{(2p)^2} \right)$$

et on reconnaît ici les termes paires et impaires de la somme $\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2}$. Donc :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2}.}$$

La seconde somme fonctionne de manière similaire :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{N}\frac{1}{(2p+1)^2}-\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{4p^2}} = \sum_{p=0}^{N}\frac{1}{(2p+1)^2}-\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{(2\times 0+1)^2}+\sum_{p=0}^{N}\left(\frac{1}{(2p+1)^2}-\frac{1}{(2p)^2}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{2\times 0+1-1}}{(2\times 0+1)^2}+\sum_{p=0}^{N}\left(\frac{(-1)^{2p+1-1}}{(2p+1)^2}+\frac{(-1)^{2p-1}}{(2p)^2}\right) = \boxed{\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.}$$

4. D'après les questions précédentes, on a :

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

On va donc chercher à calculer la somme de la série.
Cette série apparaît sous forme de sommes partielles dans la question précédente et doit pouvoir donc se calculer en connaissant les limites de :

$$\sum_{p=0}^{N}\frac{1}{(2p+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{N}\frac{1}{4p^2}.$$

Ces limites ne sont pas évidentes à calculer *a priori*. Mais la question précédente nous donne encore un autre indice : ces quantités sont aussi reliées à $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.
Donc commençons par :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{4p^2} &= \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p^2}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\\ &= \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}\\ &= \frac{\pi^2}{24}.\end{aligned}$$

Pour la seconde somme, remarquons que :

$$\sum_{p=0}^{N}\frac{1}{(2p+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n^2}-\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{4p^2}.$$

Comme les deux sommes de droites ont une limite, celle de gauche en a une aussi. On a donc :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24} = \frac{3\pi^2}{24}.$$

On peut finalement revenir à notre série initiale :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \lim_{N\to+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}-\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{4p^2}\\ &= \frac{3\pi^2}{24}-\frac{\pi^2}{24}\\ &= \frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}.}$$