TD3 - Compléments d'algèbre linéaire

1 Applications directes

Exercice 1 - Combinaisons linéaires ⋆

Dans chaque cas, déterminer la combinaison linéaire demandée.

1. Dans $\mathbb{R}^4$, $2u_1+3u_2-u_3$ avec $u_1=(1,2,3,4)$, $u_2=(1,-3,5,0)$ et $u_2=(-2,3,0,-1)$.
2. Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $4A-3B-2C$ avec $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&-2&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$.
3. Dans $\mathbb{R}_3[x]$, $2P_1+3P_2-P_3$ avec $P_1=x^3-x^2+3$, $P_2=x^2+x+1$ et $P_3=2x^3+3x^2$.

Exercice 2 - Sous-espaces vectoriels ⋆

Parmi les ensembles suivants, munis des opérations usuelles, lesquels sont des espaces vectoriels ?

1. $\{(x,0,2x,-x), x\in\mathbb{R}\}$
2. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x=-2y\}$
3. $\{(3x,-x,1), x\in\mathbb{R}\}$
4. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, 2x+y=0 \text{ et } z=-1\}$
5. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x=2y=3z\}$
6. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, 3x+2y-5z=0 \text{ et } x=3z\}$
7. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2
8. L'ensemble des polynômes de degré exactement 2
9. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
10. L'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Exercice 3 - Familles libres ou liées ⋆

Indiquer si les familles suivantes sont libres :

1. $a_1=((1,2,3),\ (0,1,-1))$;
2. $a_2=((-2,4,8,-7))$;
3. $a_3=((0,0,0))$;
4. $a_4=((1,-2),\ (2,3),\ (6,0))$;
5. $a_5=((1,1,1),\ (1,2,0),\ (1,1,0))$;
6. $a_6=((1,1,2),\ (2,2,2),\ (0,0,1))$;
7. $a_7=(1+x,\ x^2, 3+2x+x^2)$;
8. $a_8=(3,\ x+1,\ x^2-3x+2)$;
9. $a_9=\left(\left(\begin{smallmatrix}2&1\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&2\\1&3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)\right)$.

Exercice 4 ⋆

1. Soit (e_1,e_2,e_3) une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Montrer que (e_1,e_3) est libre.
2. Soit E un espace vectoriel et soient u, v et w trois vecteurs deux à deux non colinéaires. La famille (u,v,w) est-elle nécessairement libre ?
3. Soit (e_1,e_2,e_3) une famille libre d'un espace vectoriel E. Les familles (e_1,e_2+e_1,e_2+e_3) et $(e_1,e_2,2e_3)$ sont-elles libres ?

Exercice 5 - Sous-espace engendré ⋆

Montrer que chacun des ensembles suivants est un espace vectoriel en l'exprimant comme un espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. En donner une base et la dimension.

1. $H_1=\{(x,y,z) : x-y-z=0\}$
2. $H_2=\{(x,y,z) : x-3y=0\}$
3. $H_3=\{(x,y,z) : x-3y=y-z=0\}$
4. $H_4=\left\{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right) : a+3b=0\right\}$
5. $H_5=\{(x,y,z,t) : x+y+z+t=x-y+z-t=0\}$
6. $H_6=\left\{\left(\begin{smallmatrix}a&3b+c\\-a+b&a+b+c\end{smallmatrix}\right), (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

Exercice 6 - Famille de $\mathbb{R}^3$ ⋆

Pour chacune des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, dire si elle est libre et/ou génératrice de $\mathbb{R}^3$ et donner son rang.

1. $((1,2,1),\ (1,0,-1))$
2. $((7,6,9),\ (1,4,6),\ (3,6,2))$
3. $((3,6,2),\ (6,12,-4))$
4. $((2,4,-6),\ (-3,-6,9))$
5. $((3,6,2),\ (1,0,3),\ (0,0,-5))$
6. $((1,2,3),\ (-4,1,5),(-3,3,8),\ (5,1,-2))$

Exercice 7 - Bases ⋆

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille a est une base de E. Lorsqu'il s'agit de bases, donner la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base.

1. $a = ((1,2,3),\ (2,1,4),\ (1,4,2))$ et $E = \mathbb{R}^3$.
2. $a = ((1,3),\ (2,4))$ et $E = \mathbb{R}^2$.
3. $a = (1 + x + x^2,\ 3,\ x + 1)$ et $E = \mathbb{R}_2[x]$.
4. $a = (x^2 + 3,\ x + 2)$ et $E = \mathbb{R}_2[x]$.
5. $a = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)\right)$ et $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
6. $a = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)\right)$ et $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8 ⋆

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en déterminer une base et la dimension :

$$\begin{aligned}
E &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\}, \\
F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 5y - 3z = 0 \\
&\qquad \text{et } -x - 4y + 2z = 0\}, \\
G &= \{\ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid (X-1)P' - XP'' = 2P\} \\
H &= \{M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid MN = NM\} \\
&\qquad \text{où } N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},\ \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ fixés.}
\end{aligned}$$

Exercice 9 - Passage ⋆⋆

On considère la matrice A de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Pour tout réel λ, on note $E_\lambda(A)$ l'ensemble des vecteurs colonne X de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $AX = \lambda X$.

1. Justifier que $E_3(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base et la dimension.
2. Justifier que $E_{-3}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base et la dimension.
3. Montrer que la concaténation des bases trouvées dans les questions 1 et 2 forme une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ que l'on notera $\mathcal{B}'$.
4. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
5. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
6. Calculer $P^{-1}AP$.

2 Approfondissements

Exercice 10 - SEV ⋆⋆

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et dans la mesure du possible, en donner une base et la dimension.

1. L'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$
2. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_3[x]$ dont la dérivée s'annule en 1
3. L'ensemble $F_1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AM = 0\}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $F_3 = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a - 2b + c = 0\right\}$ est un espace vectoriel.
5. L'ensemble $F_4 = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{smallmatrix}\right), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$
6. L'ensemble F_5 des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 11 - Intersection de SEV ⋆⋆

Montrer que l'intersection de deux sous espaces vectoriels de E est un sous espace vectoriel de E.

Exercice 12 - Coordonnées ⋆⋆

1. Donner les coordonnées du vecteur $(4,5,-3)$ dans la base $((0,1,2),\ (1,0,-1),\ (0,0,1))$.
2. Donner les coordonnées du vecteur $3x^2 + x - 2$ dans la base $(1,\ x+1,\ x^2 + x + 1)$.
3. Donner les coordonnées du vecteur $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ dans la base $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

Exercice 13 ⋆⋆

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (A,B,C,D)$ est une base de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.
2. Écrire la matrice de passage P de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.
3. Justifier l'inversibilité de P et déterminer son inverse.
4. Déterminer les coordonnées de $M = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ dans la base $\mathcal{B}$ directement (sans utiliser la matrice de passage).
5. Retrouver le résultat en utilisant la matrice de passage.

Exercice 14 - Étude d'un sev ⋆⋆

On considère dans cet exercice l'ensemble E des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, où a, b et c sont trois réels.

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (I,\ J,\ J^2)$ est une base de E. En déduire la dimension de E.
3. Déterminer J^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. Démontrer que l'ensemble E est stable par multiplication, c'est-à-dire que si $M \in E$ et $M' \in E$, alors $MM' \in E$.

Exercice 15 - ECRICOME ECE 2008 ⋆⋆

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par $M(a, b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$.

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi : $E = \{M(a, b),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3.
2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.
3. Résoudre $AX = X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que l'ensemble des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base et sa dimension.
4. Résoudre $AX = 2X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que l'ensemble des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base et sa dimension.
5. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Montrer que P est inversible et déterminer son inverse, vérifier que $D = P^{-1}AP$ puis donner une expression de la matrice P^{-1}.
6. Prouver que la matrice $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ est une matrice diagonale.
7. Montrer que $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ est inversible.
   En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a, b)$ soit inversible.
8. Prouver que $[M(a, b)]^2 = I$ si et seulement si $[D(a, b)]^2 = I$.
   En déduire l'existence de quatre matrices $M(a, b)$ que l'on déterminera, vérifiant $[M(a, b)]^2 = I$.

3 Maths Approfondies

Exercice 16 ⋆

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z - t = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1, 1))$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 17 ⋆⋆

Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$.
3. Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(1+2x)}{x}$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ et déterminer la décomposition de f dans $F \oplus G$.

Exercice 18 ⋆⋆

Dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les deux sous-ensembles suivants :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 19 ⋆⋆

Dans $\mathbb{R}_4[X]$, on pose :

$$\begin{aligned} F &= \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = 0\}, \\ G &= \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(4) = 0\}, \\ H &= F \cap G. \end{aligned}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et en donner une base.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et en donner une base formée de puissance de $(X-4)$.
3. Montrer que $H = \{X(X-4)Q \mid Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$. En déduire une base de H.

Exercice 20 ⋆⋆⋆

Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1)\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Soit $g : x \mapsto x$. Montrer que F et $G = \mathrm{Vect}(g)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 21 ⋆⋆⋆⋆

Soit $n \geq 1$ fixé. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose :

$$F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\}.$$

1. Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ et que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P \in F_i$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - j)$.
2. Montrer que la somme $F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ est directe.
3. En déduire que $\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^{n} F_i$.