DM1 - Algèbre linéaire et étude de fonctions

À rendre le vendredi 27/09/2024

Exercice 1 - ECRICOME ECE 2022 (Exercice 1 adapté)

Dans tout l'exercice, $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I

1. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de F et préciser la dimension de F.
2. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de G et préciser la dimension de G.
3. Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que $A \in F \cap G$.
   (b) En déduire un polynôme annulateur de A.

   Explication : déterminer un polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *tel que* $a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0_n$.

   (c) Calculer $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. A est-elle inversible ?
   (d) On pose $E_1(A) = \{X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.
   Vérifier que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base et la dimension.

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

4. (a) Démontrer que :
$$M \in G \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 & = & a \\ b(b + 2a - 1) & = & 0 \end{cases}.$$
   (b) Montrer alors que : $F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}$.
5. On note $B = I_3 - A$.
   Démontrer que la famille (A, B) est une base de F.
6. (a) On note $\alpha = \frac{4a-b}{3}$ et $\beta = \frac{a+2b}{3}$.
   Vérifier que : $M = \alpha A + \beta B$.
   (b) Calculer AB et BA.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n : $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.
7. (a) Montrer que M est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.
   (b) Si α et β sont deux réels non nuls, montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$$M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B.$$

Partie III

Soient $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On considère la suite (X_n) de matrices colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = TX_n + Y.$$

8. Calculer la matrice $I_3 - T$ et exprimer cette matrice en fonction de A et B.
9. À l'aide de la question 7, calculer la matrice $(I_3 - T)^{-1}$.
10. Démontrer qu'il existe une unique matrice colonne L, que l'on déterminera telle que :
$$L = TL + Y.$$
11. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $X_{n+1} - L = T(X_n - L)$, puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n - L = T^n(X_0 - L).$$
12. Pour tout entier naturel n, exprimer X_n en fonction de A, B, L, X_0 et n.

Exercice 2 - ECRICOME ECE 2022 (extrait de l'exercice 2)

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right).$$

Partie I - Étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :
$$\forall x > 0,\ h(x) = \ln(x) + 2x - 1.$$
   (a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$. Justifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
   (c) Démontrer que : $\forall x > 0, g'(x) = \frac{1}{x^2}h(x)g(x)$.
   (d) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^\star$.
3. Démontrer que :
$$g(x) - x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ln(x).$$

Partie II - Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n).$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > 0$.
5. Écrire une fonction `Python` qui prend en argument un réel **`u0`** et un entier **`n`** et renvoie la liste des $n+1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme **`u0`**.
6. (a) Étudier le signe de $(x-1)\ln(x)$ pour $x > 0$.
   (b) Montrer que : $\forall x > 0,\ \frac{g(x)}{x} \geqslant 1$.
   (c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geqslant x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.
7. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   (a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.
9. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 > 1$.
   (a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
10. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $0 < u_0 < \frac{1}{2}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?