# DM 1 - Algèbre linéaire et étude de fonctions

Pour le vendredi 27/09/2024

## Problème 1 - ESSEC ECS 2010 (partie 1)

On désigne par $I$ l'intervalle $[1,+\infty[$ ; on note $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $I$ à valeurs réelles et $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ à valeurs réelles. On fixe enfin $a$ un réel strictement positif.
Pour $f$ un élément de $E$, on dit qu'une fonction $y$ de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ est une solution du problème $(E_f)$ si :

$$\forall x \in I,\ y'(x) - ay(x) + f(x) = 0.$$

L'objectif de ce problème est de montrer qu'à tout élément $f$ de $E$, on peut associer une unique solution $g$ de $(E_f)$ qui soit bornée sur $I$, puis d'étudier l'opérateur $U : f \mapsto g$.

1. **Étude de l'équation $(E_f)$.**
   (a) On considère $f \in E$ et $y \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$. Écrire la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{-ax}y(x)$. Montrer alors que $y$ est solution du problème $(E_f)$ si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I,\ y(x) = \mathrm{e}^{ax}\left(K - \int_1^x \mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t\right)$.
   (b) Montrer que, s'il existe une solution de $(E_f)$ qui soit bornée sur $I$, celle-ci est unique.
   (c) Vérifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.
   (d) Démontrer que $g : x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique solution de $(E_f)$ qui soit bornée sur $I$.

Dans toute la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction $g$ obtenue à la question 1d.

2. **Linéarité de $U$.**
   (a) Expliciter $U(f)$ dans le cas où $f = 1$.
   (b) Montrer que $U$ est un endomorphisme de $E$.
   (c) $U$ est-il injectif ?
   (d) On définit les puissances successives de $U$ par $U^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout entier naturel $n$ non nul, $U^n = U^{n-1} \circ U$.
   Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $U^{n+1}(f)$ est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}\mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t$.
3. **Cas des fonctions exponentielles.**
   (a) Pour $k$ un nombre réel positif et $f_k$ la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-kx}$, expliciter $U(f_k)$.
   (b) En déduire que, pour tout réel $\lambda \in \left]0, \frac{1}{a}\right]$, $\ker(U - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$.
   (c) Pour tout entier naturel $n$, expliciter $U^n(f_k)$. Pour $x$ élément de $I$, préciser $\lim_{n\to+\infty}[U^n(f)](x)$.
4. **Cas des fonctions sinus et cosinus.**
   Dans cet exemple **seulement (ensemble de la question 4)**, on prendre $a = 1$.
   (a) Expliciter $U(\sin)$ et $U(\cos)$.
   (b) Montrer que le sous-espace vectoriel $P$ de $E$ engendré par les fonctions sin et cos est stable par $U$ et que $(\sin, \cos)$ en est une base.
   Dans cette base, écrire la matrice $M$ de l'endomorphisme $U_p : \left\{\begin{array}{ccc} P & \to & P \\ f & \mapsto & U(f) \end{array}\right.$.
   (c) Calculer $M^2$, $M^3$ et $M^4$. Expliciter $M^n$ pour tout entier naturel $n$, puis préciser la limite des coefficients de $M^n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

5. **Une autre famille de fonctions**
   Pour tout entier naturel $n$, on considère la fonction de $E$ $\varphi_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}x^n$ et on note $\psi_n$ la fonction $U(\varphi_n)$.
   (a) Pour $n$ entier naturel non nul, établir une relation entre $\psi_n$, $\varphi_n$ et $\psi_{n-1}$.
   (b) Pour $p$ entier naturel, montrer que le sous-espace $F_p$ de $E$ engendré par $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est stable par $U$ et admet pour base $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p)$.
   (c) On prend ici $p = 2$.
   Écrire dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ de $F_2$ la matrice $T_2$ de l'endomorphisme $U_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} F_2 & \to & F_2 \\ f & \mapsto & U(f) \end{array} \right.$.
   Calculer $T_2^n$ pour tout entier naturel $b$, puis préciser la limite des coefficients de $T_2^n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.
6. **Une autre expression de $U(f)$.**
   Pour $f \in E$, montrer que : $\forall x \in I, U(f)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(x+t)\mathrm{d}t$.
7. **Positivité de $U$.**
   (a) Pour $f \in E$, montrer que : $|U(f)| \leq U(|f|)$.
   On considère maintenant $\varphi$ un élément de $E$ à valeurs positives et $\psi = U(\varphi)$.
   (b) Montrer que $\psi$ est à valeurs positives.
   (c) On suppose que $\varphi$ est décroissante. Montrer que $a\psi \leq \varphi$ puis que $\psi$ est décroissante.
8. **Commutation de $U$ avec la dérivation.**
   On note $E_1 = \{f \in E \cap \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \mid f' \text{ bornée sur } I\}$ et $D$ l'opérateur de dérivation qui, à tout élément de $E_1$ associe sa dérivée.
   (a) Pour $f$ un élément de $E_1$, montrer, en utilisant la question 6, que : $aU(f) = f + U(f')$.
   (b) En déduire que, pour tout élément $f$ de $E_1$, $D(U(f)) = U(D(f))$.
   (c) Pour $f$ une fonction de $E_1$ à valeurs positives et décroissante, retrouver le résultat de la question 7c : $U(f)$ est décroissante.