TD4 - Séries

1 Applications directes

Exercice 1 ⋆

1. Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$. Montrer que $\sum u_n$ converge.
2. Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n^2}$.
   (a) Montrer que (u_n) converge.
   (b) Quelle est la nature de $\sum u_n$?
3. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$, définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$ Étude de la convergence de $\sum u_n$ par deux méthodes :
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ et en déduire la nature de la série.
   (b) Donner un équivalent de u_n et retrouver le résultat quant à la convergence de la série.
4. Posons $u_n = \ln\left(n^2 - 1\right) - \ln\left(n^2\right)$, définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$. Dire si $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente.

Exercice 2 ⋆

Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et le cas échéant, calculer leurs sommes :

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{n!}, \quad B = \sum_{n=0}^{+\infty} n2^{n-1}, \quad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!},$$

$$D = \sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{3^n}{4^{n+1}} \quad \text{et} \quad E = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n+1}}.$$

Exercice 3 - Convergence et calculs ⋆⋆

Prouver la convergence de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants (sauf mention contraire, pour $n \geq 0$, et calculer sa somme :

1. $u_n = \frac{n+1}{2^n}$
2. $u_n = \frac{n^2+2^n}{4^n}$
3. $u_n = (-1)^n e^{-n}$
4. $u_n = (-1)^n n e^{-2n}$
5. $u_n = \frac{n(n+3)}{3^{n+2}}$
6. $u_n = \frac{n+3^n}{n!}$
7. $u_n = \frac{n(n-1)}{2^n n!}$
8. $u_n = \frac{2^n}{(n+2)!}$
9. $u_n = \frac{1}{4n^2-1}$ (chercher a, b : $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}\right)$)
10. $u_n = \frac{2}{n(n-2)}$, $n \geq 3$ (chercher a, b : $\frac{2}{n(n-2)} = \frac{a}{n-2} + \frac{b}{n}$)

Exercice 4 ⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n}{(n+1)!}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.
2. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \frac{a}{n!} + \frac{b}{(n+1)!}$$
et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
3. Montrer que la série de terme général $(n^2 - 1)u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 5 - Nature de séries ⋆⋆

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants (on ne demande PAS de calculer la somme dans le cas de convergence) :

1. $u_n = \frac{n^2-3}{n^\alpha + \ln n}$, avec $\alpha > 0$
2. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$
3. $u_n = \frac{\sqrt{n}(\ln n)^2}{e^n}$
4. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$
5. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$
6. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$

2 Approfondissements

Exercice 6 - Convergence et calculs ⋆⋆

1. $u_n = \frac{2n^3+n^2-4n-2}{n!}$
2. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, $\quad n \geqslant 2$
3. $u_n = \frac{1+2+\cdots+n}{1+2^3+\cdots+n^3}$
4. $u_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Exercice 7 ⋆⋆

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+2n}{n^4+n^3+1}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n^3+1},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(2 - \mathrm{e}^{1/n}).$$

Exercice 8 ⋆⋆

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $k \geq 1$:
$$\frac{k}{4k^2-1} = \frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k-1}.$$
2. En déduire que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Exercice 9 - Série-intégrale ⋆⋆

On s'intéresse à la nature de la série de terme général $\frac{1}{k \ln k}$ pour $k \geq 2$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$:
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{k \ln k}.$$
2. En déduire que pour tout $n \geq 2$:
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)).$$
3. Conclure.
4. Montrer que :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Exercice 10 - Série harmonique ⋆⋆

Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ la somme d'ordre n de la série harmonique.

1. Quelle est la limite de H_n ?
2. On cherche un équivalent de H_n.
   (a) Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{k-1}$ et en déduire que $H_n - 1 \leq \ln n \leq H_{n-1}$.
   (b) En déduire un équivalent de H_n.
3. On pose $u_n = H_n - \ln n$, et $v_n = u_n - u_{n-1}$
   (a) Montrer que la série de terme général v_n converge si et seulement si la suite (u_n) converge.
   (b) Montrer que la série de terme général v_n converge.
   (c) Montrer que la suite $H_n - \ln n$ converge vers une constante. Cette constante est la constante d'Euler, et est notée γ. On ne sait presque rien sur γ, sinon une valeur proche de 0,577...

Exercice 11 ⋆⋆

Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $u_k = \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right)$.

1. Montrer que la série de terme général u_k converge.
2. En factorisant $k(k+3)+2$, déterminer une suite $(v_k)_{k \geq 1}$ telle que $u_k = v_{k+1} - v_k$.
3. En déduire la valeur de la série des u_k.

Exercice 12 ⋆⋆⋆

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature des séries suivantes en fonction de α :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\ln(n)^{\alpha}) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\mathrm{e}^{n^{\alpha}} - 1}.$$

Exercice 13 - Une série alternée ⋆⋆⋆

Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. On pose S_n la somme partielle de la série de terme général u_n.

1. La série de terme général u_n est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont adjacentes.
3. En déduire que $\sum u_n$ converge.

Exercice 14 - Harmonique alternée ⋆⋆⋆

1. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 (-t)^{k-1} dt$.
2. En sommant la relation obtenue, montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$
3. Montrer que $\forall n \geq 1$, $0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ quand $n \to +\infty$.
4. Prouver que $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge et déterminer sa somme.

3 Maths Approfondies

Exercice 15 - Constante d'Euler ⋆⋆⋆

Pour $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

1. Montrer que la série de terme général u_n converge, puis déterminer les sommes partielles de cette série.
2. En déduire qu'il existe une constante γ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1).$$

Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 16 - Séries alternées ⋆⋆⋆

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0. On souhaite montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$ converge.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

la somme partielle de la série.

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$ converge.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$$

le reste de la série. En considérant séparément le cas n pair et le cas n impair, montrer que pour tout n entier naturel :

$$0 \leq |R_n| \leq u_{n+1}.$$

Exercice 17 - Formule de Stirling ⋆⋆⋆⋆

On veut montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Pour cela, on pose :

$$u_n = \frac{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

1. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$.
2. En déduire que la série des v_n converge. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
3. Conclure.

4 Exercices de concours

Exercice 18 - QSP HEC ECS 2008 ⋆⋆⋆⋆

Répresenter dans le plan l'ensemble des points de coordonnées (a, b) tels que $a > 0$, $b > 0$ et la série de terme général :

$$u_n = \frac{a^n}{1 + b^n}$$

soit convergente.

Exercice 19 - QSP HEC ECS 2014 ⋆⋆⋆⋆

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$$

1. Déterminer les réels a et b tels que la série de terme général u_n soit convergente.
2. Calculer la somme de cette série.

Exercice 20 - Oral ESCP ECS 2018 ⋆⋆⋆⋆

On considère une suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & > & 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & \frac{u_n^2}{n+1}. \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, v_n est bien définie.
2. (a) Montrer que la série de terme général $\frac{\ln k}{2^k}$ converge.
   (b) On pose donc :

$$\sigma = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln k}{2^k}.$$

   Montrer que la suite (v_n) converge. Exprimer sa limite en fonction de u_0 et de σ.
3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{-\sigma}$. Étudier le comportement de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On suppose dans cette question que $u_0 = e^{-\sigma}$.
   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln k}{2^k}.$$

   (b) En déduire, si elle existe, la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 21 - QSP ESCP ECS 2006⋆⋆⋆⋆⋆

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe un unique $y_n \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $\ln(y_n) + y_n = \frac{1}{n}$.
2. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et si on note ℓ sa limite, déterminer un équivalent de $y_n - \ell$.

Exercice 22 - Oral HEC ECS 2012⋆⋆⋆⋆⋆

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et pour tout n entier :

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n.$$

1. Écrire une fonction `Python` ayant pour argument un entier n et renvoyant $\sum_{k=0}^{n} u_k$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$v_n = \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}.$$

   (a) Rappeler le développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.

   (b) Montrer que :

$$\ln v_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right).$$

   Pour quelle valeur α_0 du réel α la série de terme général $\ln v_n$ est-elle convergente ?

   On considérera désormais le cas $\alpha = \alpha_0$.

   (c) Expliciter $\sum_{k=1}^{n} \ln(v_k)$ et en déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\alpha_0}}.$$

   Qu'en déduit-on pour la série $\sum u_n$?

   (d) Justifier l'existence d'un réel strictement positif D (indépendant de n) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k u_k \leq D\sqrt{n}.$$

3. (a) Établir pour tout entier naturel n, la relation :

$$2\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} k u_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

   (b) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.