Chapitre 4 - Séries

1 Généralités

Définition

Soit (u_n) une suite réelle. On appelle **série** de terme général u_n la somme formelle $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
La quantité $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelée **somme partielle** de range n de la série.
On dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge si la suite des sommes partielles (S_n) converge. Dans ce cas, on appelle **somme de la série** la limite.

Propriétés :

- Toute combinaison linéaire de séries convergentes est une série convergente. La somme est également la combinaison linéaire des sommes.
- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si u_n ne tend pas vers 0, on dit que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge **grossièrement**.
- **Attention !** On peut avoir $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ sans que la série converge.
  Exemple : série harmonique.

2 Séries usuelles

2.1 Séries géométriques

Proposition

Les séries $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Exemples :

- Calcul de $\sum_{n\geqslant 0} nq^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} n^2q^n$.
- Étude de la série de terme général $\frac{2k^2+3k+5}{2^k}$.

2.2 Série exponentielle

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

Exemples :

- Nature de $\sum_{k\geqslant 0} \frac{k^2}{3^k k!}$?
- Calcul de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k^2+3k+5}{k!}$.

2.3 Séries de Riemann

Définition

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est une constante réelle est appelée *série de Riemann.*

Proposition

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque : Dans le cas particulier $\alpha = 1$, la série de Riemann associée est appelée série harmonique. C'est une série divergente.

2.4 Séries télescopiques

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0.$$

Par conséquent, $\sum_{k=0}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge. Dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0.$$

Remarques :

- À savoir faire, mais pas un théorème de cours.
- On peut étudier la convergence de (u_n) en étudiant $\sum_{k=0}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k)$.

3 Séries à termes positifs

Attention ! les théorèmes qui suivent ont tous des hypothèses de positivité qu'il faudra rappeler lorsqu'on les utilise.

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives à partir d'un certain rang.

- **Critère d'équivalence :** si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
- **Critère de comparaison :** si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ (à partir d'un certain rang) alors la convergence $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$ et la divergence de $\sum u_n$ implique celle de $\sum v_n$.
- **Critère de négligeabilité :** si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ alors la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

Exemples : Déterminer la nature des séries de termes générales :

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right) \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Remarque : l'hypothèse de positivité est cruciale. Considérer $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

4 Convergence absolue

Définition

On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si $\sum |u_n|$ est convergente.

Proposition

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Remarques :

- La réciproque est fausse.
- Si une série est absolument convergente, l'ordre des termes dans la sommation n'a pas d'importance.
- H.P. : la réciproque est vraie ! Si une série est convergente mais pas absolument convergente, l'ordre des termes a une importance.

Exemples : nature de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$? de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$?

5 Compléments : maths approfondies

5.1 Ensembles dénombrables

Définition : Dénombrabilité

Un ensemble est dit dénombrable si il est fini ou s'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I$.

Exemples :

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^\star$, $2\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et de manière générale $\mathbb{N}^k$.
- $\mathbb{Q}$ est dénombrable mais $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

Propriétés :

- Si I et J sont dénombrables, alors $I \times J$ est dénombrable.
- Si $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dénombrables alors $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k$ est encore dénombrable.

5.2 Familles sommables

Définition

Soit $I = \{\varphi(n); n \in \mathbb{N}\}$ où $\varphi : I \to \mathbb{N}$ est une bijection. Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$ converge absolument, alors sa somme est indépendante de l'indexation φ, et pourra également être notée $\sum_{i\in I} u_i$.
Dans ces conditions, on dira que la série $\sum_{i\in I} u_i$ est absolument convergente.

Exemple : Convergence de $\sum_{x\in E} \frac{1}{x}$ où E est l'ensemble des puissances de 10.
Propriété : Si $\sum_{i\in I} u_i$ est absolument convergente alors toutes les opérations (somme, produit, regroupement par paquets) sont licites.

Théorème : Théorème de Fubini (sommation par paquets)

On suppose que $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ où les I_n sont des ensembles dénombrables deux à deux disjoints. $\sum_{i\in I} u_i$ converge absolument si et seulement si :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\ in I_n}$ est sommable.
- $\sum_n \left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right)$ converge.

Dans ce cas : $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_n \left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right)$.

Exemple : Convergence de $\sum \frac{1}{(m+n)!}$

5.3 Séries doubles

Définition : Séries doubles

On appelle série double une famille indexée par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Remarque : Si une série double $u_{i,j}$ est absolument convergente, alors :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} u_{i,j}.$$

Exemple : $\sum \frac{(-1)^m}{m!n!}$.