Chapitre 5 - Variables aléatoires discrètes

1 Approche formelle

1.1 Formalisme des probabilités

Définition : Espace probabilisable

Soit Ω un ensemble que l'on appelera univers.
Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est un ensemble d'événements si :

- $\Omega \in \mathcal{A}$;
- $\forall A \in \mathcal{A},\ \overline{A} \in \mathcal{A}$;
- Si $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i) \in \mathcal{A}^I$ alors $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

$(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable.

Définition : Probabilité et espace probabilisé

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ est appelée probabilité si :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- Si $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i) \in \mathcal{A}^I$, les A_i étant deux à deux incompatibles alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est alors appelé espace probabilisé.

Propriétés : Soient A et B deux événements. On a :

- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$;
- si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
- $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$;
- si A_1, ..., A_n n événements (pas forcément disjoints) alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarques :

- Si $P(A) = 1$, on dit que A est quasi-certain ou encore presque sûr.
- Si $P(A) = 0$, on dit que A est quasi-impossible ou encore négligeable.

Définition : Système complet d'événements

Soit I une partie de $\mathbb{N}$. On dit qu'une famille (A_i) d'événements est un système complet d'événements si :

- les A_i sont deux à deux incompatibles : $\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$,
- La réunion (disjointe) des événements couvre tout l'espace : $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.

Remarque : Si la seconde condition est remplacée par $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$, on parle de système quasi-complet d'événements.
Exemple : explorer les définitions précédentes avec un lancer de deux dés.

1.2 Formalisme des variables aléatoires

Définition : Variable aléatoire réelle

Une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \underbrace{[X \leq x]}_{=\{\omega\in\Omega,\ X(\omega)\leq x\}} \in \mathcal{A}.$$

Propriétés : Soient X, Y deux v.a.r. et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $X + Y$, XY et λX sont des variables aléatoires réelles.
- $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$ sont des variables aléatoires.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue alors $f(X)$ est une variable aléatoire.
- $[X < b]$, $[a < X]$, $[a \leq X]$ ou encore $[a < X \leq b]$ sont tous des événements.

Définition : Fonction de répartition

Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle fonction de répartition de X la fonction :

$$F_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X \leq x). \end{array} \right.$$

Exemples : tracer F_X pour $X = 42$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Propriétés :

- F_X est croissante.
- F_X est continue **à droite** en tout point.
- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
- $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

Remarque : Inversement, si une fonction f vérifie ces propriétés, on peut toujours construire une variable aléatoire X telle que $f = F_X$.

Proposition

Soient X une v.a.r, F_X sa fonction de répartition et $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

- $\mathbb{P}(X \le b) = F(b)$;
- $\mathbb{P}(a < X) = 1 - F(a)$;
- $\mathbb{P}(X < b) = \lim_{x\to b^-} F(x) = F(b^-)$;
- $\mathbb{P}(a \le X) = 1 - F(a^-)$;
- $\mathbb{P}(a < X \le b) = F(b) - F(a)$;
- $\mathbb{P}(a \le X \le b) = F(b) - F(a^-)$;
- $\mathbb{P}(a < X < b) = F(b^-) - F(a)$;
- $\mathbb{P}(a \le X < b) = F(b^-) - F(a^-)$;
- $\mathbb{P}(X = a) = F(a) - F(a^-)$.

Définition : Loi de probabilité (semi-HP)

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. La loi de X est la donnée de $\mathbb{P}(X \in I)$ pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

Remarque : X et Y ont même loi si et seulement si $F_X = F_Y$.

1.3 Variables discrètes

Définition : Variable aléatoire réelle discrète

Soit X une v.a.r. X est discète ssi $X(\Omega)$ est dénombrable.

Propriété : La loi de X est entièrement caractérisée par :

- le support $X(\Omega)$ de X et
- l'ensemble des $\mathbb{P}(X = x)$ pour tous les $x \in X(\Omega)$.

2 Lois usuelles discrètes

Nom	Paramètres	$X(\Omega)$	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$V(X)$
$\mathcal{B}(p)$	$p \in [0,1]$	$\{0,1\}$	$P(X=0) = 1-p$ $P(X=1) = p$	p	$p(1-p)$
$\mathcal{U}([\![1,n]\!])$	$n \in \mathbb{N}^\star$	$[\![1,n]\!]$	$P(X=k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$\mathcal{U}([\![a,b]\!])$	$a, b \in \mathbb{Z}^2$, $a < b$	$[\![a,b]\!]$	$P(X=k) = \frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
$\mathcal{B}(n,p)$	$n \in \mathbb{N}^\star$, $p \in [0,1]$	$[\![0,n]\!]$	$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\mathbb{N}$	$P(X=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
$\mathcal{G}(p)$	$p \in]0,1[$	$\mathbb{N}^\star$	$P(X=k) = p(1-p)^k$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

3 Probabilités conditionnelles

Définition

Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On pose : $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

Propriété : $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Formules :

- **Formule des probabilités composées :**
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots\mathbb{P}_{A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n).$$
- **Formule des probabilités totales :**
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B).$$
- **Formule de Bayes :**
$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j\in I}\mathbb{P}_{A_j}(B)\mathbb{P}(A_j)}.$$

4 Compléments : maths approfondies

4.1 Loi conditionnelle, espérance conditionnelle

Définition : Loi conditionnelle

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur Ω. On appelle loi de X sachant A, ou encore loi de X conditionnellement à A, la loi de X pour la probabilité $\mathbb{P}_A$.
Cela revient à donner tous les couples $(x, \mathbb{P}_A(X = x))$ pour $x \in X(\Omega)$.

Exemple : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ est le nombre de clients qui entrent dans un restaurant un soir. Chaque client choisit indépendamment avec une probabilité p de la viande. Y le nombre de clients qui choisissent de la viande. Loi de Y ?

Définition : Espérance conditionnelle

Soient X une v.a.r.d. avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $A \in \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$. X admet une espérance sachant A ssi X admet une espérance pour la probabilité $\mathbb{P}_A$.

Remarque : Dans ce cas, $\mathbb{E}(X|A) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}_A(X = x_i)$.
Exemple : Calculer $\mathbb{E}(Y|X = n)$ pour l'exemple précédent.

4.2 Formule de l'espérance totale

Proposition : Formule de l'espérance totale

Soient X une v.a.r.d. et $(A_i)_{i \in I}$ une système complet d'événements. On note $J = \{i \in I,\ \mathbb{P}(A_i) \neq 0\}$. Alors X admet une espérance si et seulement si :

- Pour tout $i \in J$, $\mathbb{E}(X|A_i)$ existe ;
- $\sum_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{E}(|X||A_i)$ est sommable.

Dans ce cas $\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{E}(X|A_i) = \sum_{(x,i) \in X(\Omega) \times J} \mathbb{P}(A_i) x \mathbb{P}_{A_i}(X = x)$.

Exemple : Calculer $\mathbb{E}(Y)$ avec la formule de sommation.