TD5 - Variables aléatoires discrètes

1 Applications directes

Exercice 1 ⋆

Soit m un entier naturel non nul. Une urne contient 3 boules numérotés de 1 à 3. On tire m fois une boule de cette urne, avec remise à chaque fois de la boule tirée. Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant 3$, on note B_i l'événement : « la boule numéroté i n'est pas apparue au cours des m premiers tirages ».

1. Calculer $P(B_i)$ et $P(B_i \cap B_j)$ en fonction de m (pour tout i et tout j dans $[\![1,3]\!]$ avec $i \neq j$).
2. En déduire la probabilité $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$.

Exercice 2 ⋆

On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs 0, 1, 2, 3 et 4. On donne :

$$P(X=0) = \frac{1}{10}, \quad P(X=1) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(X=2) = \frac{1}{2}.$$

1. Sachant que les événements $[X=3]$ et $[X=4]$ sont équiprobables, déterminer $P(X=3)$.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 3 ⋆

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Vérifier que F est bien une fonction de répartition.

2 Lois usuelles et formalisme

Exercice 4 ⋆

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge et vaut 1.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ telle que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X=n) = u_n$. X admet-elle une espérance ? Une variance ? Même question pour la variable $\sqrt{X}$.

Exercice 5 ⋆

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^\star$ et $(\mathbb{P}(X=n))_{n\geq 1}$ est une suite géométrique. Montrer que X suit une loi géométrique.

Exercice 6 ⋆

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et soit $Y = \frac{1}{X}$. Y admet-elle une espérance ?

Exercice 7 ⋆⋆

1. Soient $\alpha > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geq K$, $x^p \leq \mathrm{e}^{\alpha x}$.
2. Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathrm{e}^{\alpha |X|}$ admet une espérance. Montrer que X admet alors des moments à tout ordre.

Exercice 8 ⋆⋆⋆

Soit $q \in]0,1[$. On pose :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - q^{\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{cases}$$

1. Vérifier que F est une fonction de répartition. On note X la variable aléatoire associée.
2. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $P(X=x) = 0$.
3. Déterminer $P(X=k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Reconnaître alors la loi de X.

Exercice 9 ⋆⋆⋆

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Montrer que pour $(m,n) \in (\mathbb{N}^\star)^2$, on a $\mathbb{P}_{[X>m]}(X > m+n) = \mathbb{P}(X > n)$.
2. Interpréter ce résultat.

Exercice 10 ⋆⋆

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$ existe et la calculer.

Exercice 11 ⋆⋆⋆

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ qui possède une espérance. Montrer que la variable $Y = \ln X$ possède aussi une espérance.

Exercice 12 ⋆⋆

Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit sa fonction génératrice par :

$$G_X : \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)x^k. \end{array} \right.$$

1. Montrer que G_X est définie sur $[-1, 1]$.
2. Déterminer la fonction génératrice de $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
3. Déterminer la fonction génératrice de $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
4. Déterminer la fonction génératrice de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Exercice 13 ⋆⋆⋆

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que :

$$\mathbb{P}(X \text{ est pair}) \geq \mathbb{P}(X \text{ est impair}).$$

Exercice 14 - Cauchy-Schwarz ⋆⋆⋆⋆

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une variance. On souhaite prouver $\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

1. Montrer que pour tous réels x et y, on a $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

   Indice : développer $(|x| - |y|)^2$.
2. Montrer que $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$ existent. Puis montrer que $\mathbb{E}(XY)$ existe.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$\mathbb{E}(X^2)t^2 + 2t\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) \geq 0.$$
4. En distinguant les cas $\mathbb{E}(X^2) = 0$ et $\mathbb{E}(X^2) \neq 0$, prouver l'inégalité recherchée.

Exercice 15 - Variables indicatrices ⋆⋆⋆⋆

Exercice dans l'esprit de certains sujets Maths II - par exemple ECE 2018

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Montrer que si A et B sont deux événements alors :
$$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A, \quad \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B,$$
$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$
2. Démontrer que $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.
3. Soient $(A_k)_{k\in[\![A,n]\!]}$ n événements distincts. Interpréter la variable $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$.
4. **Application :** un ascenseur dessert N étages. Au rez-de-chaussée, k personnes montent dans l'ascenseur et choisisse un étage, indépendamment des autres.
   (a) Pour $i \in [\![1, N]\!]$, soit A_i l'événement « l'ascenseur s'arrête à l'étage numéro i ». Déterminer $\mathbb{P}(A_i)$.
   (b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'étages auxquels l'ascenseur s'est arrêté. Exprimer X en fonction des $\mathbb{1}_{A_i}$ et en déduire l'espérance de X.

3 Modélisation

Exercice 16 ⋆

On lance simultanément deux dés, jusqu'à ce que les deux dés donnent le même nombre. On note X le nombre de lancers nécessaires. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 17 ⋆⋆

On dispose de deux dés équilibrés : le dé A possède quatre faces rouges et deux faces noires, le dé B possède quatre faces noires et deux faces rouges.
On lance une pièce de monnaie truquée, qui tombe sur pile avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Si la pièce tombe sur pile, alors on ne joue qu'avec le dé A, si la pièce tombe sur face, on ne joue qu'avec le dé B.
On note R_i l'événement « le $i^{\text{ème}}$ lancer de dé donne une face rouge ».

1. Calculer $\mathbb{P}(R_1)$, $\mathbb{P}(R_2)$ puis $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$. Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ?
2. On a obtenu « rouge » aux deux premiers lancers. Calculer la probabilité d'obtenir « rouge » au troisième.
3. On a obtenu « rouge » aux n premiers lancers. Calculer la probabilité qu'on joue avec le dé A.

Exercice 18 ⋆⋆

N urnes comportent chacune des jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard un numéro dans chaque urne, et on appelle X le plus grand des numéros tirés.

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
2. Trouver la loi de X.

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et l'exprimer sous la forme $\mathbb{E}(X) = n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j$ où les a_j sont des réels à déterminer. Quelle est la limite de $\frac{\mathbb{E}(X)}{n}$ quand n tend vers $+\infty$? En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Quelle est la limite de $\mathbb{E}(X)$ lorsque N tend vers $+\infty$? Commenter.

Exercice 19 $\star\star$

On dispose d'une pièce qui tombe sur « pile » avec la probabilité p. On la lance jusqu'à faire « face » et on note X le nombre de lancers nécessaires. Quelle est la probabilité que ce nombre de lancers soit pair ?

Exercice 20 $\star\star$

Soient deux nombres réels $p \in]0,1[$ et $\lambda > 0$. Le nombre N de clients entrant chaque jour dans un grand magasin suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque client a la probabilité p de se faire voler son portefeuille. Soit X la variable aléatoire réelle régale au nombre de portefeuilles volés à la fin d'une journée.

1. Soit j un entier naturel. Déterminer la loi de X sachant $[N = j]$.
2. Déterminer la loi de X, son espérance, sa variance.

Exercice 21 $\star\star$

On dispose de n sacs numérotés de 1 à n. Chaque sac contient $n+1$ jetons. Dans le $k^{\text{ème}}$ sac se trouve k jetons gagnants, les autres étant perdants. Un joueur choisit au hasard un sac et y pioche un jeton.

1. Quelle est la probabilité que le jeton soit gagnant ?
2. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, sachant que le jeton tiré est gagnant, quelle est la probabilité que le tirage ait eu lieu dans le sac numéro k ?

Exercice 22 - Le concierge alcoolique $\star\star$

Un concierge possède 10 clés sur son trousseau. Lorsqu'il souhaite ouvrir une porte, il choisit une clé au hasard dans son trousseau jusqu'à obtenir la bonne. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de clés à essayer par le concierge pour ouvrir une porte.

1. Déterminer la loi de X si le concierge essaie les clés sans remise puis la loi de X s'il les essaie avec remise.
2. Le concierge essaie les clefs sans remise s'il est sobre et avec remise s'il est ivre. Le concierge est ivre un jour sur trois.
   (a) Montrer que X admet une espérance puis la déterminer.
   (b) Aujourd'hui, le concierge a eu besoin de 6 essais pour ouvrir sa porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?
   (c) Même question avec 11 essais.

4 Exercices de concours

Exercice 23 - ESCP (modifié) $\star\star$

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\alpha \in [0,1]$. Montrer que la variable α^X admet une espérance.

Exercice 24 - QSP HEC ECE 2014 $\star\star\star\star$

On dispose de n urnes U_1, U_2,..., U_n et on dispose 3 boules dans chaque urne. Dans l'ensemble des $3n$ boules, une seule est bleue, les autres sont rouges.
Sachant que l'on a tiré sans remise deux boules rouges dans l'urne U_1, quelle est la probabilité que la boule bleue se trouve dans l'urne U_2 ?

5 Mathématiques approfondies

Exercice 25 ⋆⋆⋆

On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6 et on note X le nombre de lancers nécessaires. S'il a fallu lancer k fois le dé, on place une boule blanche et k boules noires dans une urne et on effecture des tirages avec remise jusqu'à obtenir la boule blanche. On note alors Y le nombre de tirage nécessaires pour obtenir la boule blanche.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y sachant $[X = k]$.
3. Montrer que Y admet une espérance et la déterminer.
4. Que se passe-t-il si les tirages ont lieu sans remise ?

Exercice 26 ⋆⋆⋆

On dispose d'une urne contenant n boules portant des numéros deux à deux distincts. Un premier joueur effectue une suite de tirage sans remise dans cette urne jusqu'à obtenir la boule portant le plus grand numéro. On note alors X_1 le nombre de tirage qu'il a effectué.
S'il reste des boules dans l'urne, un second joueur effectue la même expérience jusqu'à tirer la boule portant le plus grand numéro parmi celles qui n'ont pas encore été tirées. On note X_2 le nombre de tirages effectués par le second joueur. Si le premier joueur a épuisé l'urne, on pose $X_2 = 0$.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_1.
2. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de X_2 conditionnellement à l'événement $[X_1 = i]$.
3. Déterminer l'espérance et la loi de X_2.

On donnera l'expression de $\mathbb{P}(X_2 = k)$ sous forme d'une somme.

Exercice 27 ⋆⋆⋆

On dispose d'une pièce qui tombe sur pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On la lance jusqu'à obtenir **pour la deuxième fois** pile et on note X le nombre de lancers nécessaires. S'il a fallu n lancers, on effectue une seconde série de n lancers et on note Y le nombre de faces obtenus lors de cette seconde série de lancers.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 28 ⋆⋆⋆

On considère une variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance.
Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}(X > k)$ converge et que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

Exercice 29 - Somme aléatoire ⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice dans l'esprit de certains sujets Maths II
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Soit N une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$.
On définit l'application X sur Ω par $X = \sum_{k=1}^{N} X_i$ c'est-à-dire :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega).$$

Montrer que X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice 30 - Oral ESCP 1999 ⋆⋆⋆⋆

Au casino, un croupier mélange trois cartes : as de cœur, roi de cœur et valet de pique. Il les présente face cachée et un joueur choisit l'une des cartes au hasard. Si c'est un cœur, il gagne 2 euros pour le roi et 1 euro pour l'as et le jeu recommence. Si c'est le valet de pique, le jeu s'arrête.
On note N le nombre de cartes tirées par le joueur et X la somme qu'il a gagnée à la fin de la partie.

1. Déterminer la loi de N.
2. Déterminer la loi de X sachant $[N = n]$.
3. Quel prix minimum le casino doit-il faire payer les parties pour que ce jeu soit rentable ?

Exercice 31 - QSP HEC 2016 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit X une variable aléatoire discrète admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et telle que $\mathbb{E}(X) = \alpha$ et $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X^4) = 1$.

1. Montrer que $\alpha \in [-1, 1]$.
2. Déterminer la loi de X.